经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

Mathematics

普通高中课程标准
实验教科书

数学

选修 2-2（理科）

湖南教育出版社

目 录

第 4 章

导数及其应用

求积问切难题多，
瞬速极值奈若何.
群贤问趋坎坷路，
双雄竞渡智慧河.
百年寻谜无穷小，
万代受益财富多.
撑起数学参天树，
人类精神奏凯歌.

如何求曲线上任一点处的切线，如何求运动物体在每一时刻的瞬时速度，这些问题好像是无穷无尽，永远做不完. 但是，用微积分的方法，成千上万的问题被一举突破，一个新的数学领域出现了. 所以恩格斯认为，微积分的发现是人类精神的伟大胜利.

4.1 导数概念

4.1.1 问题探索——求自由落体的瞬时速度

伽利略通过实验和推理发现了自由落体的运动定律：物体下落的距离 s 和所用的时间 t 的平方成正比．如果距离单位用米，时间单位用秒，实验测出近似地有函数关系：

$$s=s(t)=4.9t^2.$$

直接让物体从空中下落，它落得很快，不便观察测量．伽利略是让小球从光滑的斜面上滚下来进行观察测量的．

伽利略发现，小球在斜面上滚下的距离 s(单位：m)和所用的时间 t(单位：s)之间，有函数关系 $s=s(t)=at^2$，这叫作小球的运动方程．这里，a 是与斜面的坡度有关的常数．

伽利略看到，重力作用下在斜面上向下滚的小球，每时每刻都滚得更快．但是，他只知道如何计算在一个时间段里的平均速度，却不知道如何计算小球在某一个时刻的速度，即瞬时速度．

一百多年之后，牛顿给出了瞬时速度的概念和计算方法，回答了伽利略的问题．

牛顿是怎么想，怎么做的呢？

如果小球在某个斜面上向下滚动的运动方程是

$$s(t)=3t^2,$$

要计算小球在开始运动 2 s 时的速度，不妨先看看它在 2 s 到 2.1 s 之间的平均速度，即在区间 [2，2.1] 上的平均速度：

$$\frac{s(2.1)-s(2)}{2.1-2}=\frac{13.23-12}{0.1}=12.3\ (\mathrm{m/s}).$$

同样，可以计算出[2，2.01]，[2，2.001]，…上的平均速度，也可以计算出[1.99，2]，[1.999，2]，…上的平均速度：

要计算物体的速度，就要知道物体在一段时间里走过的一段距离，用时间除距离得到速度，也叫平均速度．如果只看某一个时刻，物体在这个时刻只有一个位置，时间和距离都是 0，通常的速度概念不是失去了意义吗？

所以，伽利略面临的困难是深刻的，是概念上的困难．

时间区间	间隔/s	平均速度/(m/s)	时间区间	间隔/s	平均速度/(m/s)
[2,2.1]	0.1	12.3	[1.9,2]	0.1	11.7
[2,2.01]	0.01	12.03	[1.99,2]	0.01	11.97
[2,2.001]	0.001	12.003	[1.999,2]	0.001	11.997
[2,2.000 1]	0.000 1	12.000 3	[1.999 9,2]	0.000 1	11.999 7
[2,2.000 01]	0.000 01	12.000 03	[1.999 99,2]	0.000 01	11.999 97
…	…	…	…	…	…

仔细观察，时间间隔越来越小的过程中，对应的平均速度似乎越来越接近一个数值，就是 12 m/s.

但是，时间间隔的缩小是一个无穷无尽的过程．有限的几次计算，能得出 12 m/s 这个确定的结果吗？

用字母代替数，可以把问题看得更清楚：

设 d 是一个绝对值很小的非 0 的数，在$[2, 2+d]$或$[2+d, 2]$这段时间里，小球运动的平均速度是

$$\frac{3(2+d)^2-3\times 2^2}{d}=\frac{3(4d+d^2)}{d}=(12+3d)\ (\mathrm{m/s}).$$

当 d 越来越接近于 0 时，这个平均速度确实就越来越接近于 12m/s.

用数学语言来说，就是“时间段的长度趋于 0 时，这段时间内的平均速度以 12 m/s 为极限”.

这个极限数值，就叫作小球开始运动后 2s 时的瞬时速度.

用这个办法，不难计算小球在任意时刻 t 的瞬时速度：先计算出时刻 t 和 $t+d$ 之间这段时间运动的距离，除以这时间段的长度 d，求出平均速度并把结果化简，再让 d 趋于 0，就得到时刻 t 的瞬时速度.

计算过程是：

（1）求平均速度：

$$\frac{s(t+d)-s(t)}{d}=\frac{3(t+d)^2-3t^2}{d}=6t+3d;$$

（2）在平均速度表达式 $6t+3d$ 中让 d 趋于 0，得到 $6t$．所以，小球在时刻 t 的瞬时速度是 $6t$ m/s.

类似地，从自由落体的运动方程 $s(t)=4.9t^2$ 出发，可以求出它

下落 t s 时的瞬时速度为 $9.8t$ m/s.

例 运动员从 10 m 高台跳水时，从腾空到进入水面的过程中，不同时刻的速度是不同的. 设起跳 t s 后运动员相对水面的高度为：

$$H(t)=-4.9t^2+6.5t+10,$$

用代数推导方法计算在 2 s 时运动员的速度（瞬时速度），再用数值计算列表观察检验计算的结果.

解 计算步骤是：

（1）求$[2,\ 2+d]$上的平均速度：

$$\frac{H(2+d)-H(2)}{d}=\frac{-4.9d^2-13.1d}{d}=-4.9d-13.1(\text{m/s});$$

（2）在平均速度表达式 $-4.9d-13.1$ 中让 d 趋于 0，得到 -13.1. 所以，运动员在 2 s 时的瞬时速度是 -13.1 m/s.

下面是数值计算的结果：

时间区间	间隔/s	平均速度/(m/s)	时间区间	间隔/s	平均速度/(m/s)
[2,2.1]	0.1	−13.59	[1.9,2]	0.1	−12.61
[2,2.01]	0.01	−13.149	[1.99,2]	0.01	−13.051
[2,2.001]	0.001	−13.104 9	[1.999,2]	0.001	−13.0951
[2,2.000 1]	0.000 1	−13.100 49	[1.999 9,2]	0.000 1	−13.099 51
[2,2.000 01]	0.000 01	−13.100 049	[1.999 99,2]	0.000 01	−13.099 951
…	…	…	…	…	…

从计算结果看出，当时间间隔越来越小时，运动员的平均速度趋于 -13.1 m/s，这和上面的代数推导的结论是一致的.

现在，把上面解决问题的思路和方法总结一下：

（1）开始提出的问题是：知道了运动方程，求某个时刻的瞬时速度；

（2）但是我们还不知道如何用数学语言描述瞬时速度；

（3）所以我们面临两个任务，要建立瞬时速度的数学概念，并且找出计算方法；

（4）要计算时刻 t 的瞬时速度 $v(t)$，先求出时刻 t 和时刻 $t+d$ 之间这个时间段的平均速度 $v(t,\ d)$；

（5）再在 $v(t,\ d)$ 中让 d 趋于 0，得到的极限数值就叫瞬时速度 $v(t)$.

这样，既有了瞬时速度的数学概念，又有了计算它的方法.

若物体的运动方程为 $s=f(t)$，则物体在任意时刻 t 的瞬时速度

$v(t)$，就是平均速度 $v(t, d)=\dfrac{f(t+d)-f(t)}{d}$ 在 d 趋于 0 时的极限.

练　习

1. 在本节例题中，求出运动员在任意时刻 t 的瞬时速度.
2. 在本节例题中，求出
   （1）运动员起跳时刻的瞬时速度；
   （2）运动员到达最高点时的瞬时速度；
   （3）运动员入水时的瞬时速度.

习题　1

学而时习之

1. 匀速运动物体的运动方程是 $s=s(t)=s_0+v_0t$，求物体在时刻 t 的瞬时速度.
2. 一球沿某一斜面自由滚下，测得滚下的垂直距离 h（单位：m）与时间 t（单位：s）之间的函数关系为 $h=t^2$，求 $t=4$ s 时此球在垂直方向的瞬时速度.

温故而知新

3. 根据竖直上抛物体的运动方程

$$h(t)=h+vt-\frac{gt^2}{2},$$

计算该物体在时刻 t 的瞬时速度. 再应用物理学的能量守恒原理，分析运动过程中动能和势能的相互转化，说明用数学方法计算出的瞬时速度是否和物理现象相符合.

4. 设 $f(x)$ 是增函数，请分别指出 $d>0$ 或 $d<0$ 时 $\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 的符号.

4.1.2 问题探索——求作抛物线的切线

自由落体的速度方向总是向下的.

竖直上抛的物体，例如跳水运动员跳水的运动过程中，速度的方向开始向上，后来向下.

斜抛或平抛的物体，例如炮弹的运动过程中，速度的方向时时都在变化. 在物理中知道，这时物体运动的轨线是抛物线，而速度的方向线正是抛物线的切线.

在历史上，解析几何的主要开创人笛卡儿曾经研究过这个问题，但他所用的方法比较特殊. 我们希望寻求更一般更简便的方法.

但是，怎样作出抛物线的切线呢？

遇到一个问题而不知道如何解答时，不妨想想过去做过的类似的问题，看哪些经验适用于解决新的问题.

过去，我们作过圆的切线.

圆的切线垂直于半径，这条性质对抛物线用不上.

但是，圆的切线和割线的某些联系，却有启发性.

温故知新，是学习知识的一般规律.

如图 4－1，A，B 是圆周上两点，过 AB 可以作一条割线. 当点 B 趋于 A 时，割线就趋于切线的位置.

图 4－1

从特殊过渡到一般，是思考数学问题的好方法.

对于一般曲线，也可以照此办理.

图 4－2 是曲线 $y=f(x)$ 的图象. P，Q 是曲线上的两个点，直线 PQ 是曲线的割线. 让点 Q 趋于 P，割线 PQ 如果趋于一条直线，这条直线不就是曲线在点 P 处的切线吗？

图 4－2

这样的设想如果成功，既建立了一般曲线的切线的概念，又指出了作切线的途径.

下面回到作抛物线切线的具体问题上来，用实际操作检验我们的设想是否有效.

图 4－3 是抛物线 $y=f(x)=x^2$ 的图象，$P(1, 1)$ 是图象上的一个点，为了过点 P 作出该抛物线的切线，只要求出这条切线的斜率就可以了．

有时候，解题的困难，在于不知道要求的东西究竟是什么，也就是问题没有说清楚．把问题说清楚了，往往就有了解决的办法．

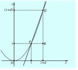


图 4－3

在抛物线上再取一个点 $Q(1+d, (1+d)^2)$，作割线 PQ．当 d 趋于 0 时，点 Q 趋于点 P，割线 PQ 趋于所要作的切线，割线 PQ 的斜率也就趋于切线的斜率．

过 Q 作 y 轴的平行线，过 P 作 x 轴的平行线，两线交于 R．则在 $\mathrm{Rt}\triangle QRP$ 中，斜边 PQ 的斜率就是 $\angle QPR$ 的正切，即

$$\frac{QR}{PR}=\frac{(1+d)^2-1}{d}=2+d,$$

让 d 趋于 0，得到过点 P 的切线的斜率为 2．

根据直线的点斜式方程，得到切线的直线方程：

$$y=2x-1.$$

这说明我们的设想是对的．

同样的方法，可以求出这条抛物线上任一点 $P(u, u^2)$ 处的切线的斜率．具体的步骤为：

（1）取不同于 P 的点 $Q(u+d, (u+d)^2)$．根据 P，Q 两点坐标，计算出直线 PQ 的斜率为 $\frac{(u+d)^2-u^2}{(u+d)-u}=2u+d$；

（2）在 PQ 的斜率 $2u+d$ 中让 d 趋于 0，得到点 $P(u, u^2)$ 处切

在解决上述问题的过程中，我们实际上得到了根据函数的解析式计算函数曲线上任一点处切线斜率的途径.

线斜率为 $2u$.

所以，过点 $P(u, u^2)$ 的切线的直线方程为 $y=2ux-u^2$.

设 $P(u, f(u))$ 是函数 $y=f(x)$ 的曲线上的任一点，则求点 P 处切线斜率的方法是：

（1）在曲线上取另一点 $Q(u+d, f(u+d))$，计算直线 PQ 的斜率

$$k(u, d)=\frac{f(u+d)-f(u)}{d};$$

（2）在所求得的 PQ 的斜率的表达式 $k(u, d)$ 中让 d 趋于 0. 如果 $k(u, d)$ 趋于确定的数值 $k(u)$，则 $k(u)$ 就是曲线在点 P 处的切线的斜率.

例 1 求二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 图象曲线上点 $P(u, f(u))$ 处切线的斜率.

解 （1）在曲线上取另一点 $Q(u+d, f(u+d))$，计算直线 PQ 的斜率

$$k(u, d)=\frac{f(u+d)-f(u)}{d}=2au+da+b.$$

（2）在所求得的斜率表达式中让 d 趋于 0，表达式趋于 $2au+b$.

所以，所求的切线的斜率 $k(u)=2au+b$.

例 2 初速大小为 v 的炮弹，如果发射方向和地面所成的角为 θ，则炮弹所经过的曲线在不计空气阻力时为抛物线. 以炮弹到发射点的水平距离为自变量 x，炮弹到发射点的垂直距离 y 可以看成是 x 的函数，其表达式为 $y=f(x)=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$，其中 g 值为 9.8 是重力常数. 根据例 1 的结果，求 $f(x)$ 的曲线上任一点 $(x, f(x))$ 处切线的斜率.

解 对照例 1，$a=\frac{-g}{2v^2\cos^2\theta}$，$b=\tan\theta$，$u=x$，故所求斜率为

$$k(x)=\frac{-gx}{v^2\cos^2\theta}+\tan\theta.$$

练 习

1. 判断曲线 $y=2x^2$ 在点 $P(1, 2)$ 处是否有切线，如果有，求出切线的方程.
2. 设 $P(x_0, y_0)$ 是曲线 $y=3-x^2$ 上的一点，写出曲线在点 P 处的切线的方程.

习题 2

学而时习之

1. 求曲线 $y=x^2+1$ 在点 $P(1, 2)$ 处的切线的斜率.
2. 计算抛物线 $y=x^2-3x+2$ 上任一点 $P(u, v)$ 处的切线的斜率，并求出抛物线顶点处切线的方程.

温故而知新

3. * 用“Z+Z 超级画板”或具有类似功能的作图软件，取适当的单位和比例，在计算机屏幕上作出例 2 中的抛物线，在抛物线上任取一点 P，使用例中求出的斜率作过 P 的直线．拖动点 P 或改变炮弹的出射角，观察直线与曲线是否相切.

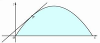


图 4-4

4.1.3 导数的概念和几何意义

在研究函数的增减性时，多次用到函数 $f(x)$ 的差分 $f(u+h)-f(u)$，那时为了方便，曾约定 $h>0$，这样，差分 $f(u+h)-f(u)$ 可以看成是函数 $f(x)$ 在区间 $[u,u+h]$ 上的改变量。

这里用到的差分 $f(u+d)-f(u)$，步长 d 可正可负。当 $d<0$ 时，要考虑的其实是函数 $f(x)$ 在 $[u+d,u]$ 上的改变量 $f(u)-f(u+d)$，对应的自变量的改变量就是 $u-(u+d)=-d$，两个改变量的比等于 $\frac{f(u)-f(u+d)}{-d}=\frac{f(u+d)-f(u)}{d}$。由此可见，不论步长 d 是正数还是负数，差商的表达式都一样，都可以写成 $\frac{f(u+d)-f(u)}{d}$。

前面我们研究了两类问题，一类问题来自物理学，涉及平均速度和瞬时速度；另一类问题来自几何学，涉及割线斜率和切线斜率。两类问题来自不同的学科领域，但却有着相同的数学模型。

两类问题，都涉及到下列几件事：

（1）一个函数 $f(x)$，可以是运动方程，也可以是曲线方程。

（2）函数 $f(x)$ 在 $x=u$ 处步长为 d 的差分 $f(u+d)-f(u)$，可以是物体在某个时段中运动的距离，也可以是曲线上两点纵坐标的差。

（3）上述差分和步长 d 的比 $\frac{f(u+d)-f(u)}{d}$，它可以是物体在某个时段的平均速度，也可以是过曲线上两点的割线的斜率；

从数学上看，它是函数 $f(x)$ 在两点处的函数值之差和对应的自变量之差的比，通常叫作 $f(x)$ 在 $x=u$ 处步长为 d 的“差商”。

（4）上述差商在步长趋于 0 时，如果趋于一个确定的数值，这个数值在前一类问题中就是运动物体在时刻 u 的瞬时速度，在后一类问题中就是曲线在点 $(u, f(u))$ 处切线的斜率。

在前面研究过的具体情形，差商可能是平均速度或割线的斜率。一般地，差商表示的是函数在自变量的某个区间上的平均变化率，它反映了自变量在某个范围内变化时，函数值变化的总体的快慢。

在各种实际问题中，常常用函数的平均变化率对事物的发展过程进行评价。

例 1 国家环保局在规定的排污达标的日期前，对甲、乙两家企业进行检查，其连续检测结果如图 4-5 所示（图中 $W_1(t)$，$W_2(t)$ 分别表示甲、乙企业在时刻 t 的排污量）。试问哪个企业治污效果较好？

解 在时刻 t_1 处，虽然 $W_1(t_1)=W_2(t_1)$，即排污量相等，但是考虑到一开始有

$$W_1(t_0)>W_2(t_0),$$

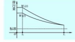


图 4－5

所以有

$$\frac{W_1(t_1)-W_1(t_0)}{t_1-t_0}>\frac{W_2(t_1)-W_2(t_0)}{t_1-t_0}.$$

这说明在单位时间里企业甲比企业乙的平均治污率大．若照此趋势发展下去，企业甲很可能较快地达到规定的排污标准．

在上面的问题解答中，平均治污率的表达式也可以使用前面使用的函数的差商的表达式．例如，记 $d=t_1-t_0$，$t_1=t_0+d$，则

$$\frac{W_1(t_1)-W_1(t_0)}{t_1-t_0}=\frac{W_1(t_0+d)-W_1(t_0)}{d}.$$

当然，如果让 $t_0=t_1-d$，则有

$$\frac{W_1(t_1)-W_1(t_0)}{t_1-t_0}=\frac{W_1(t_1)-W_1(t_1-d)}{d}.$$

这些表达式尽管形式不同，实际的意义并无区别，都是函数的差分和对应的步长的比．

例 2 投石入水，水面产生圆形波纹区．圆的面积随着波纹的传播半径 r 的增大而增大（如图 4－6）．计算：

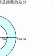


图 4－6

(1) 半径 r 从 a 增加到 $a+h$ 时，圆面积相对于 r 的平均变化率；

(2) 半径 $r=a$ 时，圆面积相对于 r 的瞬时变化率．

解 (1) 半径 r 从 a 增加到 $a+h$ 时，圆的面积从 πa^2 增加到 $\pi(a+h)^2$，其改变量为 $\pi((a+h)^2-a^2)$，而半径 r 的改变量为 h．

两者的比就是所求的圆面积相对于半径 r 的平均变化率：

$$\frac{\pi((a+h)^2-a^2)}{h}=\frac{\pi(2ah+h^2)}{h}=\pi(2a+h).$$

（2）在上面得到的平均变化率表达式中，让 r 的改变量 h 趋于 0，得到半径 $r=a$ 时，圆面积相对于 r 的瞬时变化率为 $2\pi a$.

企业的平均治污率，圆面积相对于半径 r 的平均变化率，还有前面讨论过的运动物体的平均速度，以及函数曲线的割线的斜率，从数学上看，无非是函数值的改变量与对应的自变量的改变量的比，即差商，它可以看成是函数在某个区间上的平均变化率.

让所考虑的区间的一个端点 a 固定，当区间的长度趋于 0 时，如果平均变化率趋于一个极限值，这个极限值便可看成是函数在点 a 处的瞬时变化率.

这样看来，瞬时速度、切线的斜率以及例 2 中所求的圆面积相对于半径的瞬时变化率，都是函数的瞬时变化率.

函数的瞬时变化率，数学上叫作函数的导数或微商.

定义 设函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的某个区间上有定义，如果比值 $\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 在 d 趋于 0 时（$d\neq 0$）趋于确定的极限值，则称此极限值为函数 f 在 $x=x_0$ 处的**导数**（derivative）或微商，记作 $f'(x_0)$.

用更多的符号代替语言，上述定义可以简单地表述为：

$$\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}\to f'(x_0)\quad (d\to 0).$$

这个表达式读作"d 趋于 0 时 $\frac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}$ 趋于 $f'(x_0)$".

注意到 x_0 是 f 的定义区间中的任意一点，所以也可以就是 x，而 $f'(x)$ 也是 x 的函数，叫作 $f(x)$ 的**导函数**（derived function）或一阶导数.

导函数 $f'(x)$ 也是函数，如果 $f'(x)$ 在 x 处又可导，则它的导数叫做 $f(x)$ 的二阶导数，记作 $f''(x)$. 类似的，可以定义三阶导数 $f'''(x)$ 等等.

例 3 在初速度为零的匀加速运动中，路程 s 和时间 t 的关系为

$$s=s(t)=\frac{at^2}{2}.$$

（1）求 s 关于 t 的瞬时变化率，并说明其物理意义；

(2) 求运动物体的瞬时速度关于 t 的瞬时变化率，说明其物理意义.

解 (1) s 关于 t 的瞬时变化率就是函数 $s(t)=\frac{at^2}{2}$ 的导数 $s'(t)$. 按定义计算有

$$\frac{s(t+d)-s(t)}{d}=\frac{\frac{a(t+d)^2}{2}-\frac{at^2}{2}}{d}=\frac{a\left(td+\frac{d^2}{2}\right)}{d}=at+\frac{ad}{2}.$$

当 d 趋于 0 时此式趋于 at，即 $s'(t)=at$.

从物理上看，s 关于 t 的瞬时变化率 at 就是运动物体的瞬时速度.

(2) 运动物体的瞬时速度关于 t 的瞬时变化率，承上就是函数 $s'(t)=at$ 的导数 $s''(t)$. 按定义计算有

$$\frac{s'(t+d)-s'(t)}{d}=\frac{a(t+d)-at}{d}=\frac{ad}{d}=a.$$

当 d 趋于 0 时，a 还是 a，所以 $s''(t)=a$. 它是运动物体的加速度.

练　习

1. 求函数 $y=x^2-3x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的平均变化率.
2. 设质点做直线运动，已知路程 s 是时间 t 的函数 $s=3t^2+2t+1$. 求从 $t=2$ 到 $t=2+d$ 之间的平均速度，并求出当 $d=1$，$d=0.1$ 与 $d=0.01$ 时的平均速度，再求在 $t=2$ 时的瞬时速度.

习题 3

1. 求一次函数 $y=kx+b$ 的瞬时变化率.
2. 在初速为 v 的匀加速运动中，路程 L 和时间 x 的关系为 $L=L(x)=vx+\frac{ax^2}{2}$.

   (1) 求 L 关于 x 的瞬时变化率，并说明其物理意义；

   (2) 求运动物体的瞬时速度关于 x 的瞬时变化率，说明其物理意义.
3. 当圆的半径 r 变化时，圆面积 A 关于 r 的瞬时变化率有什么几何意义?

   当圆的直径 D 变化时，圆周长 C 关于 D 的瞬时变化率有什么几何意义?

4.2 导数的运算

为了求运动物体的瞬时速度，要计算函数的导数.

为了作出曲线在一点处的切线，要计算函数的导数.

为了知道和评价事物变化的快慢和方向，要计算函数的导数.

在科学研究和工程技术活动中，大量问题的解决离不开导数的计算. 求函数的导数，和四则运算一样，如同家常便饭.

函数导数的计算是如此有用，如此重要. 这一节我们就来学习导数的计算方法和有关的运算公式.

4.2.1 几个幂函数的导数

让我们根据函数的导数的定义，计算几个简单的函数的导数.

(1) 最简单的函数是常数函数 $f(x)=c$.

这时，$f(x+d)=c$，$f(x+d)-f(x)=c-c=0$，所以

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{0}{d}=0.$$

当 d 趋于 0 时，0 当然趋于 0，这表明 $f'(x)=(c)'=0$. 即

$$(c)'=0.$$

想一想，上面的等式的实际意义是什么?

(2) 若 $f(x)=x$，$f(x+d)=x+d$，于是

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{d}{d}=1,$$

即 $$(x)'=1.$$

几何意义是，直线 $y=x$ 的斜率为 1.

(3) 若 $f(x)=x^2$，你会求它的导数吗?

其实，前面我们计算过一般二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的导数，得到 $f'(x)=2ax+b$；只要分别让数组 (a, b, c) 取值

$(0, 0, c)$和$(0, 1, 0)$就得到公式（1）、（2），取值$(1, 0, 0)$时得到$(x^2)'=2x$。

（4）求函数$f(x)=x^3$的导数，要多算一项：

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{(x+d)^3-x^3}{d}=\frac{3dx^2+3xd^2+d^3}{d}=3x^2+3dx+d^2,$$

当d趋于0时，上式趋于$3x^2$，所以$(x^3)'=3x^2$。

（5）如果$f(x)=\frac{1}{x}$，如何计算$f(x)$的导数？

还是按定义来算：

$$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}=\frac{\frac{1}{x+d}-\frac{1}{x}}{d}=\frac{\frac{x-(x+d)}{x(x+d)}}{d}=\frac{-1}{x(x+d)},$$

让d趋于0，上式趋于$\frac{-1}{x^2}$，所以$\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}$。

（6）计算$f(x)=\sqrt{x}$的导数，需要一点技巧：

$$\begin{aligned}\frac{f(x+d)-f(x)}{d}&=\frac{\sqrt{x+d}-\sqrt{x}}{d}\\&=\frac{(\sqrt{x+d}-\sqrt{x})(\sqrt{x+d}+\sqrt{x})}{d(\sqrt{x+d}+\sqrt{x})}\\&=\frac{1}{\sqrt{x+d}+\sqrt{x}},\end{aligned}$$

过去我们常常把分母有理化，这一次反其道而行之，要把分子有理化才解决问题！

让d趋于0，上式趋于$\frac{1}{2\sqrt{x}}$，所以$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$。

我们将上述6个公式，总结列表如下，以后可以直接使用。

1. 常数函数导数为0：$(c)'=0$
2. 恒等函数导数为1：$(x)'=1$
3. $(x^2)'=2x$
4. $(x^3)'=3x^2$
5. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
6. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

例 1 立方体的棱长 x 变化时，其体积关于 x 的变化率是立方体表面积的多少倍？

解 立方体的体积 $V(x)=x^3$.

由 $V'(x)=(x^3)'=3x^2$，其体积关于 x 的变化率为 $3x^2$，是立方体表面积的 0.5 倍.

例 2 写出过点 $A(-4，2)$并且和曲线 $xy-1=0$ 相切的两条直线的方程.

解 经验算知点 A 不在该曲线上．设所求的切线和曲线切于点 $Q(u，v)$，由 $uv-1=0$ 容易求出 $v=\frac{1}{u}$.

把该曲线的方程写成函数 $y=\frac{1}{x}$ 的形式，则 $y'=-\frac{1}{x^2}$．可见在点 Q 处切线的斜率为 $k=-\frac{1}{u^2}$.

计算线段 AQ 的斜率，得到方程 $\frac{v-2}{u+4}=-\frac{1}{u^2}$，将 $v=\frac{1}{u}$ 代入并整理，得到关于 u 的二次方程：

$$u^2-u-2=0.$$

解得 $u=-1$ 或 $u=2$，说明这样的切线可能有两条.

继续计算，对应的两个切点的坐标为 $(-1，-1)$ 和 $\left(2，\frac{1}{2}\right)$；两条切线的斜率分别为 -1 和 $-\frac{1}{4}$，对应的点斜式方程分别为 $y-2=-(x+4)$ 和 $y-2=\left(-\frac{1}{4}\right)(x+4)$，如图 4－7.

求曲线上点 P 处的切线与求过点 P 的切线有区别，在点 P 处的切线，点 P 必为切点，过点 P 的切线，点 P 未必为切点.

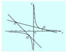


图 4－7

练　习

1. 正方形的边长 x 变化时，其面积关于 x 的变化率是正方形周长的多少倍？
2. 求曲线 $x^3-y=0$ 在点（2，8）处的切线的方程.

习题　4

学而时习之

1. 质点的运动方程是 $s=t^2$（s 的单位：m，t 的单位：s）. 求质点在 $t=3$ 时的速度.
2. 求过点 $P(3,\ 5)$ 且与曲线 $y=x^2$ 相切的直线方程.
3. 曲线 $y=x^3$ 在点 P 的切线斜率为 3. 求点 P 的坐标.

温故而知新

4. 写出过点 $A(-5,\ 3)$ 并且和曲线 $xy=1$ 相切的两条直线的方程.
5. 把 y 看成 x 的函数，计算曲线 $x-y^2=0$ 在点 $A(4,\ 2)$ 处切线的斜率. 再把 x 看成 y 的函数进行计算，对比两次计算的结果.
6. 从 x，x^2，x^3 的导数公式，你能找出规律，猜到 $\frac{1}{x}$ 和 $\sqrt{x}$ 的导数吗？

4.2.2 一些初等函数的导数表

我们已经知道了 x，x^2，x^3，$\frac{1}{x}$ 和 $\sqrt{x}$ 这几个幂函数的导数.

那么，一般的幂函数 x^a 的导数如何计算呢?

还有，我们学过的指数函数、对数函数和三角函数，它们的导数又如何计算呢?

数学家早已解决了这些函数的求导问题. 将来你学习了更多的数学知识，也会掌握这些函数求导的道理. 现在，把这些函数的求导公式列表如下，便于应用:

一些基本的初等函数导数公式表

（公式对函数定义域内的自变量 x 有效）

1. $(c)'=0$
2. $(x^a)'=ax^{a-1}$　$(a\neq 0)$
3. $(e^x)'=e^x$
4. $(a^x)'=a^x\,(\ln a)$　$(a>0，a\neq 1)$
5. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$　$(x>0)$
6. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$　$(a>0，a\neq 1，x>0)$
7. $(\sin x)'=\cos x$
8. $(\cos x)'=-\sin x$
9. $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

例 1　曲线 $y=\sin x$ 在哪些点的切线斜率为 1? 在哪些点的切线平行于 x 轴?

解　因 $y'=\cos x$，故该曲线在点 $(x，\sin x)$ 处的切线斜率为

$\cos x$. 方程 $\cos x=1$ 的解集为 $\{x=2k\pi \mid k\in\mathbf{Z}\}$，即当 x 为 2π 的整数倍时该曲线的切线斜率为 1．$\cos x=0$ 的解集为 $\left\{x=k\pi+\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbf{Z}\right\}$，故当 x 为 $\frac{\pi}{2}$ 加上 π 的整数倍时该曲线的切线斜率为 0，即切线平行于 x 轴.

例 2 用导数公式表计算：

(1) $(\sqrt[3]{x^2})'$；　(2) $(\log_2 x)'$；　(3) $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$.

解 (1) $(\sqrt[3]{x^2})'=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

(2) $(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$.

(3) $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

练　习

曲线 $y=\cos x$ 在哪些点的切线斜率为 1？在哪些点的切线平行于 x 轴？

多知道一点

导数的另一种记号

比较导数公式表中的公式(2)和(3)，我们发现，对同一个表达式，幂与底数的位置不同，求导的结果就不同.

这就引来了一个问题，如果在实际问题中，求导的表达式 $(u^v)'$ 该如何计算呢？是按幂函数求导？还是按指数函数求导？

这个问题暴露了用一撇表示导数这个记号的缺点．这个由微积分学的创建者之一牛顿引进的记号虽然简单，但不能指出是关于哪

个变量求导，所以有时并不方便.

微积分学的另一位创建人莱布尼茨，使用记号$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$来表示函数 f 关于变量 x 的导数. 这里$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$是一个不可分割的运算符号，不要当成分数. 被求导的函数可以写在横线的上方，也可以写在右面. 例如：$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}=2x$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x=\cos x$ 等等.

用这种记号，表达式 u^v 的求导问题就可以表示清楚了：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}u^v$ 是把 u 看成变量求导，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}u^v$ 是把 v 看成变量求导，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}u^v=vu^{v-1}\ (v\neq 0),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}u^v=u^v\ln u\ (u>0).$$

想一想，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^v$ 等于什么？

例 1 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=1$ 对不对？是不是约分的结果？

解 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$就是$(x)'$，所以$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=1$，是对函数 $y=x$ 求导，不是约分.

例 2 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(a\sin^2(x^3+1)+a\cos^2(x^3+1))^5=?$

解 被求导的表达式等于 a^5，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(a\sin^2(x^3+1)+a\cos^2(x^3+1))^5=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}a^5=5a^4.$$

例 3 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^x=?$

解 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^x=u^x\ln u$.

习题 5

学而时习之

1. 用导数公式表求下列函数的导数：

(1) $y=x^{6}$；　　(2) $y=x^{3}$；

(3) $x=\sin\theta$；　　(4) $u=\cos\varphi$.

2. 曲线 $y=x^{n}$（n 是正整数）在 $x=2$ 处的导数为 12，求 n 的值.

3. 水平放置的弹簧一端固定，另一端连接一小球，弹簧振动时，小球在光滑的桌面上做往复运动，运动方程为 $s=\sin t$，求小球在平衡点（$s=0$）和回复点的瞬时速度.

4. 用导数公式表计算：

(1) $(\sqrt{x^{3}})'$；　　(2) $(\log_a x)'$；　　(3) $\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'$.

4.2.3 导数的运算法则

我们已经知道了几个函数的导数．从这几个函数出发，经过加减乘除，可以得到更多的函数．相应地，从这几个函数的导数出发，能不能经过加减乘除得到更多函数的导数呢？

1．前面计算过函数 $y=x^2$ 的导数，也计算过函数 $y=3x^2$ 的导数（那时用的自变量是 t，t 相当于这里的 x），后者的导数恰好是前者导数的 3 倍，这里是不是有更一般的规律呢？$F(x)=cf(x)$的导数，是不是 $f'(x)$和数 c 的乘积呢？

用定义计算，$\frac{cf(x+d)-cf(x)}{d}=c\left(\frac{f(x+d)-f(x)}{d}\right)$．当 d 趋于 0 时，$\left(\frac{f(x+d)-f(x)}{d}\right)$趋于 $f'(x)$，前面的式子应当趋于 $cf'(x)$．可见，函数常数倍的导数，等于函数导数的同样的常数倍，这个运算法则写成公式就是

$$(cf(x))'=cf'(x).$$

2．前面计算过函数 $H(t)=-4.9t^2+6.5t+10$ 的导数．检查一下，结果是不是等于$-4.9t^2$，$6.5t$ 和 10 这三项的导数之和呢？

一般地，和函数 $u(x)=f(x)+g(x)$的导数，等于两函数的导数和．用定义计算，

$$\frac{u(x+d)-u(x)}{d}=\frac{f(x+d)+g(x+d)-(f(x)+g(x))}{d}$$

$$=\frac{f(x+d)-f(x)}{d}+\frac{g(x+d)-g(x)}{d}.$$

当 d 趋于 0 时，两项分别趋于 $f'(x)$和 $g'(x)$，其和就趋于 $f'(x)+g'(x)$．写成公式就是

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).$$

类似地有

$$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x).$$

想一想，三个或更多函数的和函数的导数计算，类似的法则该如何表示呢？

例 1 求曲线 $y=f(x)=2x^3-x^2-3x+1$ 和直线 $x=1$ 交点处切线的斜率 k.

解 求 y 对变量 x 的导数：

$$y'=f'(x)=6x^2-2x-3.$$

将 $x=1$ 代入得

$$f'(1)=6-2-3=1.$$

所以曲线和直线 $x=1$ 交点处切线的斜率 $k=1$（图 4-8）.

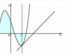


图 4-8

3. 设 $F(x)=f(x)g(x)$，为计算 $F'(x)$，写出

$$\frac{F(x+d)-F(x)}{d}$$

$$=\frac{f(x+d)g(x+d)-f(x)g(x)}{d}$$

$$=\frac{f(x+d)g(x+d)-f(x+d)g(x)+f(x+d)g(x)-f(x)g(x)}{d}$$

$$=\frac{f(x+d)g(x+d)-f(x+d)g(x)}{d}+\frac{f(x+d)g(x)-f(x)g(x)}{d}$$

$$=f(x+d)\left(\frac{g(x+d)-g(x)}{d}\right)+g(x)\left(\frac{f(x+d)-f(x)}{d}\right).$$

当 d 趋于 0 时，$f(x+d)$ 趋于 $f(x)$，$\frac{g(x+d)-g(x)}{d}$ 趋于 $g'(x)$，$\frac{f(x+d)-f(x)}{d}$ 趋于 $f'(x)$.

猜一猜，如果知道了 $f'(x)$ 和 $g'(x)$，是不是有 $(f(x)g(x))'=f'(x)g'(x)$ 呢？

用具体例子试试看，让 $f(x)=3$，$g(x)=x$，有 $(f(x)g(x))'=f'(x)g'(x)$ 吗？

很遗憾，我们得不到这么方便的公式，还是从定义出发，老老实实地推算吧。

所以得到 $F'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$，即运算法则

$$(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+g(x)f'(x).$$

例2 求函数 $f(x)=x^3\sin x$ 的导数.

解 $f'(x)=(x^3\sin x)'=x^3(\sin x)'+(x^3)'\sin x$

$$=x^3\cos x+3x^2\sin x.$$

容易想到，不可能有 $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{1}{f'(x)}$，要从定义出发推算一下.

4. 设 $F(x)=\frac{1}{f(x)}$（$f(x)\neq 0$），则 $\frac{F(x+d)-F(x)}{d}=$

$$\frac{\frac{1}{f(x+d)}-\frac{1}{f(x)}}{d}=\frac{1}{f(x)f(x+d)}\left(\frac{f(x)-f(x+d)}{d}\right).$$

让 d 趋于 0，得到 $F'(x)=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$，即运算法则

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

例3 （1）用上述法则求 $\frac{1}{x}$ 的导数；

（2）求函数 $\frac{1}{\cos x}$ 的导数.

解 （1）设 $f(x)=x$，由 4 中的法则 $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$，这里 $f'(x)=(x)'=1$，又一次得到 $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

（2）$\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

5. 把上述 3、4 结合起来，得到两函数之商的求导法则：

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)g'(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}\quad (f(x)\neq 0)$$

例4 用两函数之商的求导法则计算 $\frac{\sin x}{\cos x}$ 的导数.

解 设 $g(x)=\sin x$，$f(x)=\cos x$，则

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)g'(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$=\frac{\cos x(\sin x)'-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

结果和前面公式表中的 $\tan x$ 的导数一致.

6. 知道了 $f'(x)$，如何计算 $(f(3x+2))'$ 呢？有没有 $(f(3x+2))'=f'(3x+2)$ 呢？

试一试，由 $(x^2)'=2x$ 能得出 $((3x+2)^2)'=2(3x+2)$ 吗？不行！

设 $F(x)=f(ax+b)$，则

$$\begin{aligned}\frac{F(x+d)-F(x)}{d}&=\frac{f(a(x+d)+b)-f(ax+b)}{d}\\&=\frac{f((ax+b)+ad)-f(ax+b)}{d}\\&=a\left(\frac{f((ax+b)+ad)-f(ax+b)}{ad}\right).\end{aligned}$$

让 d 趋于 0 时，ad 趋于 0，$\frac{f((ax+b)+ad)-f(ax+b)}{ad}$ 趋于 $f'(ax+b)$，所以得到 $F'(x)=af'(ax+b)$，即法则

$$(f(ax+b))'=af'(ax+b).$$

注意，$f'(ax+b)$ 是先求 $f'(u)$ 再将 $u=ax+b$ 代入，而 $(f(ax+b))'$ 则是先将 $u=ax+b$ 代入 $f(u)$ 再对 x 求导.

例 5 计算 $(2x-1)^4$ 的导数.

解 根据上述法则 6，取 $f(u)=u^4$，$u=2x-1$，则

$$[(2x-1)^4]'=2f'(u)=2(4u^3)=8(2x-1)^3.$$

算一算，把 $(2x-1)^4$ 展开直接计算，结果一样吗？

导数运算法则表

1. $(cf(x))'=cf'(x)$
2. $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

   $(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$
3. $(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$
4. $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}\quad(f(x)\neq 0)$
5. $\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)g'(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}\quad(f(x)\neq 0)$
6. $(f(ax+b))'=af'(ax+b)$

练　习

1. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=5+3x-2^x$；　　(2) $S(t)=3\sin t-6t+100$；

(3) $g(x)=\dfrac{7}{4x}-\dfrac{x^2}{3}$；　　(4) $W(u)=\dfrac{1}{u}-\sqrt{7u}$.

2. 计算：

(1) $(xe^x)'$；　　(2) $(2\sin(3+x))'$；

(3) $(3x^3e^x+2x^2e^x-e^x+7)'$；　　(4) $(x\tan(\pi x-1))'$；

(5) $((5x-e)^4)'$；　　(6) $\left(\dfrac{\sin(1+2x)}{x}\right)'$；

(7) $\left(\dfrac{1}{\cos x}-\sin x\tan x\right)'$；　　(8) $\left(\ln(2x+1)+\dfrac{1}{2x+1}\right)'$.

3. 判断下列求导是否正确，如果不正确，加以改正：

(1) $[(3+x^2)(2-x^3)]'=2x(2-x^3)+3x^2(3+x^2)$；

(2) $\left(\dfrac{1+\cos x}{x^2}\right)'=\dfrac{2x(1+\cos x)+x^2\sin x}{x^2}$.

习题　6

学而时习之

1. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=3-2x$；　　(2) $H(t)=-2t^2+6t-5$；

(3) $g(x)=3x^2-\dfrac{1}{4x}$；　　(4) $F(u)=u-\sqrt{5u}$；

(5) $p(x)=x^4-2x^3+3x^2+6x-1$；　　(6) $T(x)=\sin x-\cos x$；

(7) $u(x)=3e^x+2\tan x$；　　(8) $f(x)=\log_2 x+\cot x$.

2. 计算：

(1) $(x^2\ln x)'$；　　(2) $(x^2e^x\sin x)'$；

(3) $(2^x\tan x)'$；　　(4) $(\sqrt{x}\cos x)'$；

(5) $((ax+\cot x)^2)'$；　　(6) $(A\sin(\omega t+\varphi))'$；

(7) $(x^2e^{2x-1})'$；　　(8) $((u+3)\ln(u+3)-u)'$.

3. 物体的运动方程是 $s=-\frac{1}{6}t^3+2t^2-5$，求物体在 $t=3$ 时的速度.

4. 设曲线 $y=x^2+1$ 上一点 (x_0, y_0) 处的切线 l 平行于直线 $y=2x+1$.

(1) 求切点 (x_0, y_0)；

(2) 求切线 l 的方程.

温故而知新

5. 已知 $P(u, v)$ 是曲线 $(1+x^2)y-x=0$ 上的一点．写出该曲线在点 P 处的切线的方程，并分别求出切线斜率为 1 时和切线平行于 x 轴时对应的切点 P 的坐标.

6. 在阻力作用下的一个振动物体的运动方程为 $s=s(t)=3e^{at}\sin(kt+b)$，求物体的瞬时速度和瞬时加速度.（瞬时速度的瞬时变化率，就是物体的瞬时加速度.）

7*. 一个质点 M 在半径为 r cm 的圆周上做匀速运动，两个坐标和时间 t 的关系分别为 $x=x(t)=r\cos(\omega t)$ 和 $y=y(t)=r\sin(\omega t)$．质点 M 的速度向量为 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$，加速度向量为 $\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right), \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\right)$．写出质点 M 的速度向量和加速度向量，并说明它们与 M 的位置向量 (x, y) 的关系.

8. 根据求导公式表和求导运算法则，找出满足下列等式的函数 $f(x)$：

(1) $(f(x))'=f(x)$；　(2) $(f(x))''=f(x)$；　(3) $(f(x))'''=f(x)$.

9*. 在我们的求导公式表中，有关指数函数、对数函数和三角函数的公式共有 8 个．试在这 8 个公式中找出 3 个，利用导数运算法则从这 3 个公式中推导出另外的 5 个公式.

数学实验

用计算机求函数的导数和作切线

由于求导运算在科技活动中有广泛的应用，人们编写了根据函数表达式计算导数的程序，便于快捷地求出函数的导数。

用“Z+Z 超级画板”可以计算函数的导数。

打开“超级画板”，在左面工作区下方单击“程序”按钮（图4-9），打开程序工作区。要计算函数 x^5+ax 关于 x 的导数，就在英文输入状态下键入：

Diff（x^5+a*x，x）；

然后按 Ctrl+Enter 键执行，则程序返回计算的结果：

≫5x⁴+a#

图4-9

这里“Diff（，）；”是求导运算的命令形式。在括号中的逗点前键入被求导的函数的表达式，逗点后键入有关的变量。

下面是几条求导命令的执行记录。注意在求 $(5x+y)^4$ 关于 x 的导数时，结果是展开了的形式。如果要表成乘幂的形式，要在求导之后进行因式分解，即添上一个 Factor 命令。

Diff(x^5+a*x，x)；

≫5*x⁴+a#

Diff(sin(x)+e^x, x);

$\gg(e)^{x}+\cos(x)\#$

Diff(u*x, u);

≫x#

Diff(u*x,x);

≫u#

Diff((5*x+y)^4, x);

$\gg 2500*x^{3}+1500*x^{2}*y+300*x*y^{2}+20*y^{3}$

Factor(Diff((5*x+y)^4, x));

$\gg(2)^{2}*(5)*(5*x+y)^{3}\#$

Diff(3^x+x, x);

$\gg(3)^{x}*\ln(3)+1\#$

Diff(ln(x),x);

$\gg\frac{1}{x}\#$

Diff(tan(x), x);

$\gg\sec^{2}(x)\#$

Diff(5*sin(a*x+b), x);

$\gg 5*a*\cos(a*x+b)\#$

用免费下载的"Z+Z超级画板"，可以作上面的计算。用其中"文本作图"功能，还可以作函数曲线和切线：

(1) 执行菜单命令"作图|文本作图"，打开文本命令作图对话框（图 4-10）；

图 4-10

(2) 在对话框左下部分，单击"曲线"项目前的"+"号，展开命令单，双击命令单中的第 1 行，在上方栏里出现待编命令项 Function (....)（图 4-11）；

(3) 依次键入曲线方程 $y=x^\wedge 3/3-2^* x^\wedge 2+2^* x+1$，变量范围 −6 和 6 以及描点数 100（图 4－12）.

单击对话框中右面的“运行命令”按钮，作出函数曲线(稍后运行也可)；

(4) 单击“曲线”项目前的“−”号收缩曲线命令单，再单击“点”项目前的“+”号展开命令单，

图 4－11

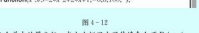


图 4－12

双击命令单中的第 2 行，在上方框里出现待填命令项 Point（.....）；

(5) 在第一个逗号前键入曲线上一点的横坐标 u，再依次键入纵坐标 $u^\wedge 3/3-2^* u^\wedge 2+2^* u+1$ 和 x 拖动参数 u．单击对话框中右面的“运行命令”按钮，作出曲线上一个点 A；

(6) 单击“点”项目前的一号收缩曲线命令单，再单击“直线”项目前的“+”号展开命令单，双击命令单中的第 8 行，在上方框里出现待填命令项 LineOfPointSlope（..）；

(7) 在第一个逗号前键入点 A 的标号 6（在对话框右下部可以查到点 A 的标号），再依次键入曲线在点 A 处切线的斜率，也就是函数导数在 $x=u$ 时的值 $u^\wedge 2-4^* u+2$．单击对话框中右面的“运行命令”按钮，作出曲线在点 A 处的切线（图 4－13）；

(8) 单击“直线”项目前的“−”号收缩直线命令单，再单击“文本”项目前的“+”号展开命令单，双击命令单中的第 5 行，在上方框里出现待填命令项 Variable（,）；

(9) 键入字母 u，单击“运行命令”按钮，作出 u 的变量尺，拖动变量尺上的滑钮，可以改变切点和切线；

(10) 单击“文本”项目前的“−”号收缩文本命令单，再单击“圆锥曲线”项目前的“+”号展开命令单，双击命令单中的倒

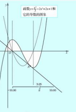


图 4－13

3 行，在上方框里出现待填命令项

ConicOfEquation（,）；

（11）键入函数导数的方程如图 4－14；

图 4－14

单击“运行命令”按钮，作出函数导数的图象（图中的虚线抛物线）；

（12）单击对话框右上角关闭对话框；

（13）用智能画笔功能作出抛物线和 x 轴的两个交点，并分别过两交点作出平行于 y 轴的两条直线；

（14）两条直线分别把两条曲线分成三段，仔细观察，粗里曲线的 3 段有何特点？虚线曲线的 3 段有何特点？从这里观察到的现象，能看出函数的增减和它的导数的正负有联系吗？

4.3 导数在研究函数中的应用

4.3.1 利用导数研究函数的单调性

在图 4－13 中，画出了一个函数 $y=f(x)$ 和它的导函数 $y=f'(x)$ 的曲线，其中导函数的曲线和 x 轴有两个交点，分别过两个交点作平行于 y 轴的直线，两条直线把图象分成左、中、右三部分，分别观察每部分中的两段曲线，可以发现函数和它的导函数的性质之间的某些关联．

左边，函数递增，导数为正；

中间，函数递减，导数为负；

右边，函数递增，导数又为正．

是不是函数的增减和它的导数的正负之间有确定的联系呢？

让我们观察更多的图象．

图 4－15 是 $y=\sin x$ 和它的导函数 $y=\cos x$ 的图象；图 4－16 是 $y=x^2-3x$ 和它的导函数 $y=2x-3$ 的图象；图 4－17 是 $y=e^x-x$ 和它的导函数 $y=e^x-1$ 的图象；图 4－18 是 $y=x\cos x$ 和它的导函数 $y=\cos x-x\sin x$ 的图象．

图 4－15

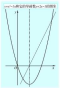


图 4-16

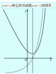


图 4-17

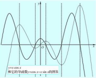


图 4-18

通过对这些例子的观察，我们发现好像有这样的法则：

如果在一个区间内，函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 递增；

如果在一个区间内，函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 递减。

原来，我们是如何判断一个函数的增减性呢？

我们有一个有效的工具，叫作差分．用差分判断函数的增减性，所用的法则是：

如果在一个区间内，函数 $f(x)$ 的差分 $(f(x+h)-f(x))>0$，则 $f(x)$ 递增；

如果在一个区间内，函数 $f(x)$ 的差分 $(f(x+h)-f(x))<0$，则 $f(x)$ 递减．

对比一下，用导数的正负判断函数的增减性的法则，比起用差分的正负判断函数的增减性的法则，有何不同？

唯一的不同，就是在法则中用导数取代了差分．

例 1　用导数研究二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的增减性．

解　求出 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=2ax+b$，分两种情形：

若 $a>0$，则 $f'(x)$ 在 $\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上为负，在 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上为正，故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上递减，在 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上递增．

若 $a<0$，则 $f'(x)$ 在 $\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上为正，在 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上为负，故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上递增，在 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$ 上递减．

这结论我们早就知道，但现在得来全不费工夫！

导数的正负对应着函数的增减，导数的绝对值大小和函数的性态又有什么关系呢？

路程对时间的导数是瞬时速度，瞬时速度的绝对值大说明跑得快，绝对值小说明跑得慢．

函数的导数就是函数值关于自变量的变化率．变化率的绝对值大说明变得快，绝对值小说明变得慢．

从函数的图象上来看，导数是切线的斜率．斜率的绝对值大说明切线陡，曲线也就陡，斜率的绝对值小说明切线较平，曲线也就平缓一些．

可以严格地证明，上面从观察实例中归纳出来的规律确实是数学上的定理．为此就要把导数概念建立在严格的极限理论和实数理论基础之上．这里，只要了解和应用这个规律就是了．

虽然暂时不能证明，我们还是可以从直观上理解这个规律．

其实不奇怪，导数本来就是从差分与步长的比变来的，它继承了差分的性质，是合情合理的．

可是，由于在差分的表达式里多了个参数，讨论差分的正负就比较麻烦，差分转化为导数，由于步长趋于 0 而精简了一些拖泥带水但却无关大局的项，讨论起来就方便多了．

回过头去再看看图 4－18，是不是这样？

例 2 如图 4－19，圆 C 和直角 AOB 的两边相切，直线 OP 从 OA 处开始，绕点 O 匀速旋转（到 OB 处为止）时，所扫过的圆内阴影部分的面积 S 是时间 t 的函数，它的图象大致如图 4－20中（　　）．

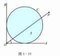


图 4－19

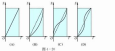


图 4－20

解 当直线转动时，若某时刻直线被圆所截得的弦较长，S 的瞬时变化率就较大，此处的导数也较大，图象中这里的切线较陡，曲线就较陡．所以曲线开始由平缓变陡；到过程进行到一半时，截得的弦最大，曲线最陡；以后弦又渐渐变短，曲线由陡变缓．4 个图中只有 D 具有上述特点，所以选 D．

此题的真实图象如图 4－21．

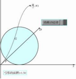


图 4－21

从图 4－13 到 4－18上还能看出更多的信息．

导数的正负对应着函数的增减，导数的增减说明什么呢？

导数增加，就是函数图象上切线的斜率增加．斜率增加的几何意义又是什么呢？

练 习

求下列函数的导数，并根据导数的正负指出函数的递增和递减区间.

(1) $f(x)=3-2x$；　　(2) $f(x)=1-\frac{2}{x}$；

(3) $f(x)=x+\frac{1}{x}$；　　(4) $f(x)=x-2\sqrt{x}$.

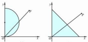
习题 7

1. 求下列函数的导数，有条件时，可用计算机或计算器计算并作图来检验答案.

(1) $f(x)=e^x \sin x$；　　(2) $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$；

(3) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$；　　(4) $f(x)=x(x-1)(x-2)$.

2. 若把例 2 中的圆改成如图 4 - 22 (a) 的半圆，正确的答案是哪个？如果改成图 4 - 22 (b) 中三角形呢？



(a)　　(b)

图 4 - 22

3. 求证：函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$ 在区间 $(-2, 1)$ 内是减函数.

4.3.2 函数的极大值和极小值

大量实际问题要求确定某些函数的最大值或最小值以及对应的最大值点或最小值点，这类问题统称为最值问题．对于二次函数，我们早已掌握了最值问题的求解方法．

如果 $x=c$ 是函数 $y=f(x)$ 在某个开区间 (u, v) 上的最大值点，即不等式 $f(c)\geqslant f(x)$ 对一切 $x\in(u, v)$ 成立，就说函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取到极大值 $f(c)$，并称 c 为 $f(x)$ 的一个极大值点，$f(c)$ 为 $f(x)$ 的一个**极大值**（maximun value）．

类似地，如果 $x=c$ 是函数 $y=f(x)$ 在某个开区间 (u, v) 上的最小值点，即不等式 $f(c)\leqslant f(x)$ 对一切 $x\in(u, v)$ 成立，就说函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取到极小值 $f(c)$，并称 c 为 $f(x)$ 的一个极小值点，$f(c)$ 为 $f(x)$ 的一个**极小值**(minimun value)．

极大值和极小值统称**极值**（extreme value），极大值点和极小值点统称极值点．

找出了一个函数所有的极值和极值点，最值问题也就迎刃而解．

如果 $f(x)$ 在 $(u, c]$ 上递增，在 $[c, v)$ 上递减，它当然在 $x=c$ 处取到极大；反过来，如果在 $(u, c]$ 上递减，在 $[c, v)$ 上递增，它在 $x=c$ 处取到极小．

函数在极值点如果有导数则必为 0．这是微积分学的一条基本定理，叫作罗尔定理．

由导数的正负可以判断函数的增减，确有助于找出函数的极值和极值点．但是，有没有更简便的办法呢？

观察图 4－13 到 4－18，函数的极值点是导数的什么点？

原来都是导数的零点．

这是不是一般法则呢？

看图 4－23，如果函数在某个区间内有极大值，将一条平行于 x 轴的直线从上方渐渐向下平

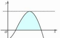


图 4－23

移，直到碰上曲线（在这个区间上的一段）就停下来。这样，直线停下来时的高度，也就是曲线在这个区间内所达到的最高点，这时这条直线就是曲线的这个局部最高点处的切线。

当然，这里的前提是函数在极值点有导数。例如，$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处取到极小，但是 $f'(0)$ 不存在，就谈不上 $f'(0)=0$。

也就是说，如果函数的曲线在局部最高点处有切线，这切线应当和 x 轴平行。

换句话说，函数在极大值点的导数为 0。

同样的道理，函数在极小值点的导数也为 0。

总之，**函数在极值点的导数为 0**。

反过来，导数的零点是否一定是函数的极值点呢？

如图 4－24，函数 $y=x^3$ 是递增函数，没有极值点；但它的导函数 $y=3x^2$ 有零点。

图 4－24

可见，导数的零点可能不是函数的极值点。

也就是说，若 $f'(c)$ 存在，$f'(c)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=c$ 处取到极值的必要条件，但不是充分条件。

通常，若 $f'(c)=0$，则 $x=c$ 叫作函数 $f(x)$ 的驻点。

驻点，就是驻扎下来稍事休息之点，至于休息之后继续前进还是回头后退，是另一回事。

一个函数的驻点，再加上什么条件，才能保证它是极值点呢？

这条件刚才已经想到了，就是导数在这个点的两侧要变号，导数的图象曲线在这里要穿过 x 轴。

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间有导数，就可以采用如下的方法求它的极值：

（1）求导数 $f'(x)$；

（2）求 $f(x)$ 的驻点，即求 $f'(x)=0$ 的根；

（3）检查 $f'(x)$ 在驻点左右的符号，如果在驻点左侧附近为正，右侧附近为负，那么函数 $y=f(x)$ 在这个驻点处取得极大值；如果在驻点的左侧为负，右侧附近为正，那么函数 $y=f(x)$ 在这个驻点处取得极小值。

例 1 求函数 $f(x)=x+\sin x$ 的驻点和极值点.

解 求得 $f'(x)=1+\cos x$，方程 $1+\cos(x)=0$ 的解集就是 $f(x)$ 的驻点之集：

$$\{x=(2k+1)\pi \mid k\in \mathbf{Z}\}.$$

观察 $f'(x)=1+\cos x$ 的符号有助于进一步的分析. 由于 $1+\cos x$ 在任意两个相邻的驻点之间恒大于 0，即 $f(x)$ 在任意两个相邻的驻点之间递增，所以没有极值（图 4-25）.

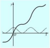


图 4-25

例 2 求函数 $g(x)=x^2(3-x)$ 的极大值和极小值.

解 求得 $g'(x)=6x-3x^2$，解方程 $6x-3x^2=0$ 得驻点 $x=0$ 和 $x=2$.

$g'(x)$ 在驻点左右的符号如下表所示：

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	$+$	$-$

故 $g(x)$ 有极大值点 $x=2$，对应的极大值为 $g(2)=4$；

$g(x)$ 有极小值点 $x=0$，对应的极小值为 $g(0)=0$（图 4-26）.

图 4-26

练 习

1. 求下列函数的驻点、极值点和对应的极值. 有条件时用计算机或计算器作图对照.

（1）$f(x)=2x^2-6x+1$； （2）$g(x)=\cos x+\frac{x}{2}$；

（3）$f(x)=2x^3+3x^2+6x-7$； （4）$h(x)=x^2e^x$.

2. 如果 $f'(c)=0$ 且 $f''(c)=0$，$f(x)$ 在 $x=c$ 处能够取到极值吗？

多知道一点

用二阶导数判断极值

能不能用一个简单的条件来判断导数的图象曲线是穿过 x 轴，还是碰一下就回头？

如果碰一下就回头，就成了导函数的极值点了，导函数的导函数在这一点就应当为 0。

反过来，如果导函数的导函数在此点非零，此点就不是导数的极值点，导数的图象曲线在这里应当穿过 x 轴。

函数 $f(x)$ 的导函数的导数，叫作 $f(x)$ 的二阶导数，记作 $f''(x)$。

上面的讨论说明，$f'(c)=0$ 而 $f''(c)\neq 0$，则 $x=c$ 是 $f(x)$ 的极值点。是极大还是极小呢？

如果 $f''(c)>0$，则 $f'(x)$ 在 $x=c$ 附近递增，由负变正，所以 $f(x)$ 由递减变为递增，在 $x=c$ 处取到极小。

类似地，如果 $f''(c)<0$，则 $f'(x)$ 在 $x=c$ 附近递减，由正变负，$f(x)$ 由递增变为递减，在 $x=c$ 处取到极大。

概括一下：

$f(x)$ 在 $x=c$ 处取到极值的必要条件是 $f'(c)=0$；

$f(x)$ 在 $x=c$ 处取到极值的充分条件是 $f'(c)=0$ 且 $f''(c)\neq 0$；

$f(x)$ 在 $x=c$ 处取到极大的充分条件是 $f'(c)=0$ 且 $f''(c)<0$；

$f(x)$ 在 $x=c$ 处取到极小的充分条件是 $f'(c)=0$ 且 $f''(c)>0$。

例 利用导数求二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的极大或极小值。

解 求得 $f'(x)=2ax+b$，可见 $f(x)$ 有唯一驻点 $x=-\dfrac{b}{2a}$。

又因 $f''(x)=2a$ 恒不为零，所以 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 是 $f(x)$ 的极值点，当 $a>0$ 时为极小，当 $a<0$ 时为极大。

4.3.3 三次函数的性质：单调区间和极值

我们曾经用配方法、差分法和导数法探讨过二次函数的性质，其中导数方法最为简便快捷.

利用函数的导数来研究函数的性质，不但便捷，而且具有一般性. 只要能算出函数的导数并求出导函数的零点，便能把该函数的单调区间和极大极小值点一一列出，做到一目了然.

三次函数的导数是二次函数，二次函数的零点是容易求出的. 所以，用导数方法可以彻底了解三次函数的增减变化和极大极小.

我们曾经用差分方法研究过一些具体的三次函数的单调性；在本章中也有过有关三次函数的图象、例题和练习. 现在可以居高临下，讨论一般的不超过三次的多项式函数了.

设 $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，如果 $a=0$，$F(x)$ 可能是二次函数、一次函数或常函数，可结合前节的例题，总结出方法和结论.

以下设 $a\neq0$，则 $F'(x)=3ax^2+2bx+c$ 是二次函数，可能有三种情形：

情形 1 函数 $F'(x)$ 没有零点，$F'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不变号.

若 $a>0$，$F'(x)$ 恒正，$F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上递增；

若 $a<0$，$F'(x)$ 恒负，$F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上递减.

情形 2 函数 $F'(x)$ 有一个零点 $x=w$，根据二次函数的性质：

若 $a>0$，$F'(x)$ 在 $(-\infty, w)\cup(w, +\infty)$ 上恒正，$F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上递增；

若 $a<0$，$F'(x)$ 在 $(-\infty, w)\cup(w, +\infty)$ 上恒负，$F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上递减.

情形 3 函数 $F'(x)$ 有两个零点 $x=u$ 和 $x=v$，设 $u<v$.

根据二次函数的性质：

若 $a>0$，$F'(x)$ 在 $(-\infty, u)$ 和 $(v, +\infty)$ 上为正，在 (u, v)

根据学过的知识，情形 1 的充要条件是
$4b^2-12ac<0$，
即 $b^2<3ac$.
情形 2 的充要条件是
$b^2=3ac$.
情形 3 的充要条件是
$b^2>3ac$.

这些方法适用于其他可求导的函数.
重要的是方法，这些结论不必记忆.

上为负；

对应地，$F(x)$在$(-\infty, u)$上递增，在(u, v)上递减，在$(v, +\infty)$上递增；

可见$F(x)$在$x=u$处取极大值，在$x=v$处取极小值.

若$a<0$，$F'(x)$在$(-\infty, u)$和$(v, +\infty)$上为负，在(u, v)上为正；

对应地，$F(x)$在$(-\infty, u)$上递减，在(u, v)上递增，在$(v, +\infty)$上递减；

可见$F(x)$在$x=u$处取极小值，在$x=v$处取极大值.

例 1 指出下列函数的单调区间和极值点.

(1) $f(x)=x^3-2x^2+2x-7$；

(2) $g(x)=-3x^3+6x^2-4x+5$；

(3) $u(x)=x^3-12x+8$；

(4) $h(x)=-37+36x-3x^2-2x^3$.

解 (1) 求得$f'(x)=3x^2-4x+2$.

由于$f'(x)$恒正，$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上递增（图 4-27）.

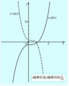


图 4-27

(2) 求得 $g'(x)=-9x^2+12x-4=-(3x-2)^2$.

由于 $g'(x)$ 在 $\left(-\infty,\ \frac{2}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{2}{3},\ +\infty\right)$ 上均为负，故 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,\ \frac{2}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{2}{3},\ +\infty\right)$ 上均递减，从而 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上递减（图 4-27）.

(3) $u'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$，$u'(x)$ 有两个零点 $x=-2$ 和 $x=2$．$u'(x)$ 在 $(-\infty,\ -2)$ 上为正，在 $(-2,\ 2)$ 上为负，在 $(2,\ +\infty)$ 上为正；

对应地，$u(x)$ 在 $(-\infty,\ -2)$ 上递增，在 $(-2,\ 2)$ 上递减，在 $(2,\ +\infty)$ 上递增；

因此 $u(x)$ 在 $x=-2$ 处取到极大；

在 $x=2$ 处取到极小（图 4-28）.

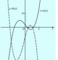


图 4-28

(4) $h'(x)=36-6x-6x^2$

$$=-6(6-x-x^2)=6(2-x)(3+x).$$

$h'(x)$ 有两个零点 $x=-3$ 和 $x=2$，$u'(x)$ 在 $(-\infty,\ -3)$ 上为负，在 $(-3,\ 2)$ 上为正，在 $(2,\ +\infty)$ 上为负；

对应地，$u(x)$ 在 $(-\infty,\ -3)$ 上递减，在 $(-3,\ 2)$ 上递增，在 $(2,\ +\infty)$ 上递减；

因此 $u(x)$ 在 $x=-3$ 处取到极小，在 $x=2$ 处取到极大（图 4-28）.

例 2 求函数 $F(x)=x^3-4x^2+2x+5$ 在 $[-1,\ 3]$ 上的最大值和最小值.

解 $F'(x)=3x^2-8x+2$；

$F'(x)$ 有两个零点：

$x_1=\dfrac{4-\sqrt{10}}{3}=0.279\ 24\cdots$

$x_2=\dfrac{4+\sqrt{10}}{3}=2.387\ 4\cdots$

容易看出 $F'(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上为负，在区间 (x_1, x_2) 之外为正.

所以 $F(x)$ 在 x_1 处取到极大值 $F(x_1)=5.268\ 35\cdots$

在 x_2 处取到极小值 $F(x_2)=0.583\ 50\cdots$

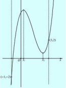


图 4－29

两个极值点都在所考虑的区间 $[-1, 3]$ 之内，将此极大极小值与 $F(-1)=-2$ 和 $F(3)=2$ 比较，可知 $F(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上的最大值是 $F(x_1)=5.268\ 35\cdots$，最小值是 $F(-1)=-2$（图 4－29）.

练　习

1. 指出下列函数的单调区间和极值点.

（1）$f(x)=x^3-3x^2+3x-2$；

（2）$g(x)=-3x^3+5x^2-4x+11$；

（3）$u(x)=-x^3+27x+7$；

（4）$k(x)=42-45x-3x^2+x^3$.

2. 求函数 $F(x)=4-3x+6x^2-2x^3$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大值和最小值.

3. 讨论函数 $f(x)=x^2+ax+5$ 的增减性.

习题 8

学而时习之

1. 求下列函数的导数，并根据导数的正负指出函数的递增、递减区间和极大极小值.

(1) $f(x)=5x-3$；　　(2) $f(x)=\frac{x}{1+x}$；

(3) $f(x)=x-\frac{1}{x}$；　　(4) $g(x)=x^2-2x-3$；

(5) $f(x)=x^{10}$；　　(6) $f(x)=\ln x+x$；

(7) $g(x)=\frac{x}{2+x^2}$；　　(8) $g(x)=x(x+1)(x-3)$；

(9) $g(x)=e^x\cos x$；　　(10) $g(x)=x+2\sin x$；

(11) $h(x)=2x^3-3x^2+x-8$；　　(12) $u(x)=5-3x+2x^2-x^3$.

2. 求下列函数在指定的闭区间上的最大值和最小值.

(1) $F(x)=2x^3-17x^2+42x-28$，$[1, 5]$；

(2) $G(x)=e^x(x^2-4x+3)$，$[-3, 2]$.

温故而知新

3. 设 $P(-5, u)$，$Q(0, v)$ 是曲线 $y=x^2+3x-4$ 上的两点.（1）作出曲线的并与 PQ 平行的切线；（2）P，Q 之间的这段曲线是不是夹在切线和直线 PQ 之间？你能说明其中的道理吗？

4. 已知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上有导数 $F'(x)$ 和二阶导数 $F''(x)$，并且 $F''(x)>0$；分别记曲线的两端点 $(a, F(a))$，$(b, F(b))$ 为 A，B，则下列三种情形中哪种是对的？

(1) 曲线在线段 AB 的下方；

(2) 曲线在线段 AB 的上方；

(3) 曲线穿过线段 AB.

4.4 生活中的优化问题举例

在日常生活、生产建设和科技活动中，做一件事总要付出一定的代价，也总想取得一定的效果。

在付出代价一定的条件下，我们总想取得最好的效果；在预期效果确定的情形下，我们总想只付出最小的代价。

例如，投入一定的成本如何获得最大的利润？制作满足一定要求的器皿如何使用料最省？完成一项任务如何使工效最高？这类问题都叫作优化问题。

我们曾经探讨过不少优化问题了．解决问题的方法也是五花八门：判别式方法，平均不等式法，线性规划方法，差分方法以及利用二次函数的性质等等。

不少优化问题，可以化为求函数最值的问题．导数方法是解决这类问题的有效工具。

例 1 有一边长为 a 的正方形铁片，铁片的四角截去四个边长为 x 的小正方形，然后做成一个无盖方盒（图 4－30）。

图 4－30

（1）试把方盒的容积 V 表示成 x 的函数；

（2）求 x 多大时，做成方盒的容积 V 最大．

解 （1）方盒的高为 x，底面是边长为 $a-2x$ 的正方形，所以

$$V=V(x)=x(a-2x)^2\left(a>0,\ x\in\left[0,\ \frac{a}{2}\right]\right).$$

（2）为了求 $V(x)$ 在 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$ 上的最大值点，要求出它在 $\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$ 内部的极大值点．为此求出

$$\begin{aligned}V'(x)&=(4x^3-4ax^2+a^2x)'\\&=12x^2-8ax+a^2=(2x-a)(6x-a).\end{aligned}$$

$V'(x)$有两个零点：$x_1=\frac{a}{6}$，$x_2=\frac{a}{2}$．由二次函数性质可知$V'(x)$在$x=\frac{a}{6}$处由正变负，故$V(x)$在$x_1=\frac{a}{6}$处取极大，对应的极大值

$$V\left(\frac{a}{6}\right)=\left(\frac{a}{6}\right)\left(\frac{2a}{3}\right)^2=\frac{2a^3}{27}.$$

由于$V(0)=V\left(\frac{a}{2}\right)=0$，故$V(x)$在$\left[0,\frac{a}{2}\right]$上的最大值就是

$$V(x_1)=\frac{2a^3}{27}.$$

即当$x=\frac{a}{6}$时，做成方盒的容积V最大．

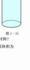


图 4－31

例 2　如图 4－31，某种罐装饮料设计每罐容积为 250 cm^3，罐的形状为圆柱体，圆柱侧面的厚度为 0.5 mm，上下底厚度为 1.0 mm，如何设计罐体才能使原材料用量最少？做一个罐至少用多少立方厘米的原材料？

解　设圆柱体的高为h cm，底面半径为x cm，则其体积为

$$\pi hx^2=250\ (cm^3).$$

由此得到　$h=\frac{250}{(\pi x^2)}$．

圆柱的侧面积　$S_1=2\pi xh=\frac{500}{x}$ (cm^2)．

圆柱上下底面积之和　$S_2=2\pi x^2$ (cm^2)．

需要的原材料体积为：

$$V(x)=0.05S_1+0.1S_2=\left(\frac{25}{x}+0.2\pi x^2\right)cm^3\ (x>0).$$

$$V'(x)=0.4\pi x-\frac{25}{x^2}.$$

$V'(x)$在$(0,+\infty)$上有唯一的零点$x_0=\left(\frac{62.5}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$．

容易算出，$V'(1)<0$，$V'(5)>0$；可见$V'(x)$在x_0处由负变正．于是$V(x)$在$(0,+\infty)$上有唯一的极小值点x_0，也就是最小值点．

因此罐体的底面半径应为$r=\sqrt[3]{\frac{62.5}{\pi}}=2.71$ (cm)．

罐体的高应为 $h=\frac{250}{\pi r^2}=10.84$ (cm)(如图 4－31)．

所需的原材料体积为：

$V(2.71)=13.84$ (cm^3)．

例 3 让一个木块从光滑斜面的上端自由滑落到下端，给定斜面两端的水平距离为 d，如何选择斜面和水平面之间的角度 x，才能使从上端到下端滑落所用的时间最短？

图 4－32

解 木块在光滑斜面上自由下滑，是初速为零的匀加速运动，其运动方程为 $s=\frac{at^2}{2}$ (a 是加速度)． ①

如图 4－32，木块在前进方向所受的力为 $mg\ \sin x$，所以它的加速度 $a=g\ \sin x$ (g 是重力加速度)． ②

将②代入①，得到木块的运动方程 $s=\frac{t^2 g\ \sin x}{2}$． ③

木块从上端到下端经过的路程为 $s=\frac{d}{\cos x}$，代入③得到：

$$\frac{d}{\cos x}=\frac{t^2 g\ \sin x}{2}. \qquad ④$$

由④解出从上端到下端滑落所用的时间 t：

$$t=\sqrt{\frac{2d}{g\ \sin x\ \cos x}}. \qquad ⑤$$

由题意，要求的是⑤的右端关于变量 x 的最小值点，也就是函数

$$f(x)=\sin x\ \cos x \quad \left(x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

的最大值点．而 $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$ 在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一零点 $x_0=\frac{\pi}{4}$，因为 $f'(0)>0$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，故 $f'(x)$ 在 x_0 处由正变负，所以 $f(x)$ 在 $x=x_0=\frac{\pi}{4}$ 处取到极大，也是最大．

根据正弦倍角公式，有 $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，立刻知道当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时 $\sin 2x=1$，所以 ($\sin x\cdot\cos x$) 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处取到最大值．可见有时对特殊问题可用特殊方法．

最后得到结论：斜面和水平面之间的角度 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，木块从光滑斜面的上端自由滑落到下端所用的时间最短．

例 4 生产某种新商品 n 件的成本为 $(5000+10n)$ 元，市场分析预期当年的销售量 Q 和出厂价 x 的关系为 $Q=15\,000-6x^2$. 如何确定出厂价 x，才能使此种商品当年的毛利润最大？这时的销售量和毛利润各是多少？

解 毛利润＝销售量×出厂价－成本，而成本由销售量确定，销售量是出厂价 x 的函数，所以可以把利润写成 x 的函数.

$$\begin{aligned}L(x)&=Qx-(5\,000+10Q)\\&=x(15\,000-6x^2)-[5\,000+10(15\,000-6x^2)]\\&=-6x^3+60x^2+15\,000x-155\,000.\end{aligned}$$

由于 $x<10$ 必然赔本，$x>50$ 又卖不出去，故设 $x\in[10,50]$.

求得

$$\begin{aligned}L'(x)&=-18x^2+120x+15\,000\\&=6(-3x^2+20x+2\,500).\end{aligned}$$

$L'(x)$在$[10,50]$上只有一个零点

$$x_0=\frac{10+20\sqrt{19}}{3}=32.392\,7.$$

计算出$L(x_0)=189\,912$，

$$L(10)=-5\,000,$$

$$L(50)=-50\,000.$$

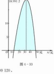


图 4－33

可见 $L(x)$ 在 x_0 处取到极大值1 899 120.

结论：出厂价定为 32.4 元时当年的毛利润最大；对应的销售量为

$$Q=15\,000-6x^2=8\,701\ (件);$$

对应的毛利润为（如图 4－33）

$$8\,701\times32.4-(5\,000+10\times8\,701)=189\,902(元).$$

想一想，最后算出的毛利润和 $L(x)$ 的极大值略有不同，为什么？实际作计划时，出厂价、销售量和毛利润可能是多少？

例 5 江轮逆水上行 300 km，水速为 v (km/h)，船相对于水的速度为 x (km/h)，已知行船时每小时的耗油量为 cx^2，即与船相对于水的速度的平方成正比，问 x 多大时，全程的耗油量最小？

解 船的实际速度为 $x-v$，故全程用时为 $\frac{300}{x-v}$（h），所以耗油量关于 x 的函数为：

$$H(x)=\frac{300cx^2}{x-v}\quad (c>0, v>0, x>v).$$

求得 $H'(x)=300c\left(\frac{2x}{x-v}-\frac{x^2}{(x-v)^2}\right)$

$$=\frac{300c(2x(x-v)-x^2)}{(x-v)^2}$$

$$=\frac{300cx(x-2v)}{(x-v)^2}.$$

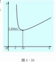


图 4－34

$H'(x)$ 在 $(v, +\infty)$ 上有唯一零点 $x_0=2v$，并且 $H'(x)$ 在 $(v, 2v)$ 上为负，在 $(2v, +\infty)$ 上为正，可见 $H(x)$ 在 $x=2v$ 时取到最小（图 4－34），即当 $x=2v$ 时，全程的耗油量最小.

实际上，行船时还有其他开支，船还应当在预定的时间到达目的地，不能把耗油量最小作为主要的决策因素.

练　习

将一长为 8 cm，宽为 5 cm 的矩形纸张，四角截去相同大小的正方形，然后折叠成一个无盖的纸匣．试问：截去的正方形其边长为多长时，才能使得纸匣的容积最大？

习题　9

学而时习之

1. 已知等腰三角形的周长是 $2l$（定数），问它的腰多长其面积为最大？并求其最大的面积.

2. 求证：

（1）同一个圆的内接矩形中，正方形面积最大；

（2）同一个圆的内接等腰三角形中，等边三角形面积最大。

3. 把半径为 R 的金属球切削成圆柱形的零件，要使车下来的金属屑最少，那么这个圆柱形零件的高应为多少？

4. 已知圆柱形罐头盒的体积是 V（定数），问它的高与底面半径多大能使罐头盒的表面积为最小？

5. 企业管理者通过对某收音机制造厂做上午班工人工作效率的研究表明，一个中等技术水平的工人，从 8:00 开始工作，t 小时后可装配晶体管收音机的个数为

$$Q(t)=-t^3+9t^2+12t.$$

则这个工人从 8:00 到 12:00 何时的工作效率最高？

温故而知新

6. 要设计一个容积为 $V=20\pi\ m^3$ 的有盖圆柱形贮油桶，已知上盖单位面积造价是侧面的一半，而侧面单位面积造价又是底面的一半，问贮油桶半径 r 取何值时总造价最低？

7. B 在 A 东 10 km，C 在 B 北 3 km。现在要修一条从 A 到 C 的公路，沿从 A 到 B 的方向路线报价是 4 000 万元/km，沿其他路线是 5 000 万元/km，问如何设计线路最省钱？

8. 计划修建一条水渠，它的横断面是彼此全等的等腰梯形，设这梯形的底边与侧边的长等于常数 b（如图 4－35 所示），为了获得最大的流量，应当使横断面的面积尽可能大，问这时水渠应当有怎样的坡度？

图 4－35

9. 从半径为 R 的圆形铁片中剪去一个扇形（如图 4－36 所示），将剩余部分围成一个圆锥形漏斗，问剪去的扇形的圆心角多大时，才能使圆锥形漏斗的容积最大？

图 4－36

阅读材料

学一点微积分

如果把数学比成一棵大树，我们学过的算术、代数、几何、解析几何这些初等数学就是树根，这一章要初步讨论的微积分是树干的主要部分，其他名目繁多的数学分支，好比是大树的枝叶.

微积分的创立，被誉为“人类精神的最高胜利”（引自《自然辩证法》，恩格斯著），是数学史上，也是人类历史上的一件大事．没有微积分，科学研究和工程技术中的大量问题就无法解决.

代数与几何的结合，产生了解析几何，有了解析几何，就能够直观而又定量地表述事物的运动和变化，在解析几何搭建的舞台上，才出现了研究变量的数学．变量数学的基础，就是微积分.

微积分的思想萌芽，特别是积分学，早在公元前 200 多年就已经出现．自古以来，面积和体积的计算一直是人们感兴趣的问题．为了计算某些特殊的曲线包围的面积或曲面包围的体积，古希腊的阿基米得，古代中国的刘徽、祖冲之，都有过出色的贡献．他们可以说是人类建立一般积分学的前驱.

微分学的起源则要晚得多．刺激微分学发展的主要问题，是求曲线的切线、求变速运动的瞬时速度、变化中的事物的瞬时变化率以及求函数的极大极小值．虽然求切线的问题也是古已有之，但古代的数学家并没有从运动和变化的角度来表述和研究它．一直到 17 世纪上半世纪，由于天文学、力学、光学的发展和工业技术的需要，使得切线问题、瞬时变化率问题以及函数的极大极小问题的研究成为不能回避的当务之急．同时，工业和科技的发展，使人们对积分学的基本问题（面积、体积、曲线长、重心等的计算）的兴趣被重新激发出来．那时，几乎所有的科学大师都致力于寻求解决

这些难题的新的数学方法，大家的努力促进了数学的迅速进展，发现了微分学和积分学的联系，导致了变量数学的诞生.

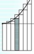
在本课程中，我们只能十分粗浅地领略一点点微积分的主要思想和基本方法，从一些例题中认识微积分方法的威力.

4.5 定积分与微积分基本定理

4.5.1 曲边梯形的面积

把圆周分成很多小段，使每一段都接近于直线段，大量小三角形的面积之和就能逼近圆的面积．这种策略总结起来，就是：化整为零，以直代曲．

把一个曲边梯形分成多个小曲边梯形就是化整为零，用矩形代替小曲边梯形就是以直代曲．



用横线阴影矩形面积代替小曲边梯形面积，误差不会超过它上方的“帽子”矩形面积．

我们来做一个数学实验：

任务：计算抛物线弓形的面积．图 4－37 是函数 $y=x^2+1$（$0\leqslant x\leqslant 1$）的曲线，它是一段抛物线．要得到这块抛物线弓形的面积，只要将梯形 $ABCD$ 的面积，减去曲线下方有斜线阴影的那块面积 S．这块位于曲线和 x 轴之间的图形，叫作函数 $y=x^2+1$ 在区间 $[0,1]$ 上的“曲边梯形”．

图 4－37

建议：采用化整为零、以直代曲的策略：把闭区间 $[0,1]$ 等分成 n 段，经过这些分点作平行于 y 轴的直线，把曲边梯形分割成 n 个小曲边梯形．再用矩形近似地代替曲边梯形来计算．n 越大，分得越细，误差越小．

[问题的由来和历史] 飞流而下的瀑布，水的流线大体上是抛物线；人工瀑布后面的混凝土墙的截面，为了与水的流线配合，有的就采取抛物线拱的形状．有些建筑物的上顶，也采取抛物线柱面或旋转面形状．计算抛物线弓形的面积，不仅是有趣的数学问题，也有实际意义．

公元前200多年，古希腊的数学家和物理学家阿基米得就研究过抛物线弓形面积的计算方法．他的方法很巧妙，但比较特殊，是专门对付抛物线的．我们要探讨一种更简单的思路，这种思路也适用于别的曲线．

如图 4－38 是 $n=4$ 的情形．整个曲边梯形被分为 4 个小曲边梯形．每个小曲边梯形包含了一个较小的矩形（横线阴影部分），又被一个较大的矩形所包含．我们用较小的矩形来近似地代替对应的小曲边梯形．

这 4 个有横线阴影的矩形，宽度都是 $\frac{1}{4}$，长度顺次为：

$$y_0=1，y_1=1+\left(\frac{1}{4}\right)^2，y_2=1+\left(\frac{2}{4}\right)^2，y_3=1+\left(\frac{3}{4}\right)^2．$$

它们面积之和记作 $S(4)$，则

$$\begin{aligned}S(4)&=\left(\frac{1}{4}\right)\times(y_0+y_1+y_2+y_3)\\&=\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(4+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)\\&=1+\frac{1^2+2^2+3^2}{4^3}=\frac{39}{32}．\end{aligned}$$

这样以直代曲产生的误差，不会超过图中横线阴影矩形上方的 4 个小矩形面积的和．把它们接在一起，就成了图中右边附加的沙点阴影矩形，其面积为

$$\left(\frac{1}{4}\right)\times(2-y_0)=0.25．\quad ①$$

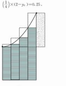


图 4－38

是不是一定要等分呢？当然不一定．只要分得细误差就会小．不过取等分比较好算．

当然，也可以用较大的矩形来代替曲边梯形．更一般地，可以取小区间上的任意一点 x，用 $f(x)$ 作为矩形的长来计算．

事实上，第 k 条上方的空白矩形面积为 $\left(\frac{1}{n}\right)\times\frac{2k-1}{n^2}$（$k=1,\cdots,n$）．

对于更大的 n，计算方法类似，n 个小矩形的宽度都是 $\frac{1}{n}$，长度顺次为：

$$y_0=0,\ y_1=1+\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ y_2=1+\left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ y_{n-1}=1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

为了方便，记 $y_n=2$．n 个小矩形面积之和记作 $S(n)$，则

$$\begin{aligned}S(n)&=\left(\frac{1}{n}\right)\times(y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})\\&=\left(\frac{1}{n}\right)\times\left(n+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\\&=1+\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}.\end{aligned} \quad ②$$

利用计算器或计算机对 $n=5$，8，10，15，20，100，1 000 作计算，得到

$$S(5)=1.24\cdots$$
$$S(8)=1.273\cdots$$
$$S(10)=1.285\cdots$$
$$S(15)=1.301\cdots$$
$$S(20)=1.308\cdots$$
$$S(100)=1.328\cdots$$
$$S(1\,000)=1.332\,8\cdots$$

实验结果使我们相信，不管用的小矩形是较大的或较小的，甚至不管小区间是不是等分，只要分得够小，计算结果总是越来越接近 $\frac{4}{3}$．

注意，前面图中梯形 $ABCD$ 面积为 $\frac{3}{2}$，而 $\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$．

所以有理由猜想：曲边梯形的面积 $S=\frac{4}{3}$，而抛物线弓形的面积是 $\frac{1}{6}$．

为了确认这个猜想，要估计一下以直代曲的误差．与 $n=4$ 的情形①类似，这误差不会超过如图 4－38 中右边附加的沙点阴影矩形的面积，即不超过

$$\left(\frac{1}{n}\right)\times(y_n-y_0)=\frac{1}{n}.$$

也就是说，

$$|S-S(n)|<\frac{1}{n}.\qquad ③$$

可见当 n 很大时，$S(n)$ 与曲边梯形的面积 S 很接近．要多接近，就能多接近．

数学实验中通常有大量的计算工作，有时还要作表格、画图．这些工作有的可以使用计算器，有的最好是用计算机．实在没有条件，可以分组合作用手算完成．

对于本节要计算的 $S(n)$，可以先编程定义一个函数，然后调用该函数进行计算．

下面是参考程序在"Z+Z 超级画板"环境下运行的情形：

$S(n)=\{q=0;$

$\quad for(i=1;i<n;i=i+1)\{q=q+i^2;\}$

$\quad 1+\frac{q}{n^3};\}$

$\gg S(n)$（注：以上定义了函数，以下执行函数）#

$S(20)$；

$\gg\frac{1047}{800}=1.30875$ #

$S(100)$；

$\gg\frac{26567}{20000}=1.32835$ #

$S(1000)$；

$\gg\frac{2665667}{2000000}=1.33283$ #

下面反过来积零成整，证明曲边梯形的面积 S 确实是 $\frac{4}{3}$．为方便，我们把曲边梯形下部的方形去掉，只考虑图中虚线上方的面积 Q．设 $[0,1]$ 的 n 等分点为 $0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n=1$，$d=\frac{1}{n}$，

作和式

$$Q(n)=(x_0^2+x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)d.$$

显然有 $\quad Q(n)=S(n)-1,\ Q=S-1.$

利用恒等式 $\quad (x+d)^3=x^3+3x^2d+3xd^2+d^3,$

得到 $\quad 3x^2d=(x+d)^3-x^3-(3x+d)d^2.$ ④

将 $x=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 顺次代入上式，注意 $x_k+d=x_{k+1}$，得到

$$3x_0^2d=x_1^3-x_0^3-(3x_0+d)d^2,$$

$$3x_1^2d=x_2^3-x_1^3-(3x_1+d)d^2,$$

$$3x_2^2d=x_3^3-x_2^3-(3x_2+d)d^2,$$

……

$$3x_{n-1}^2d=x_n^3-x_{n-1}^3-(3x_{n-1}+d)d^2.$$

将上列各式相加，得

$$3Q(n)=x_n^3-x_0^3-[(3x_0+d)+(3x_1+d)+\cdots+(3x_{n-1}+d)]d^2.$$

注意到 $x_n=1,x_0=0,3x_k+d<3(x_k+d)=3x_{k+1}$ 得

$$|3Q(n)-1|<|3x_1+3x_2+\cdots+3x_n|d^2,$$

而 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 都小于 1，$x_n=1$，故有 $|3Q(n)-1|<3nd^2=\frac{3}{n}$，

故 $$\left|Q(n)-\frac{1}{3}\right|<\frac{1}{n},$$ ⑤

即 $$\left|S(n)-\frac{4}{3}\right|<\frac{1}{n}.$$

把上式与③即 $|S-S(n)|<\frac{1}{n}$ 相结合，得

$$\left|S-\frac{4}{3}\right|<\frac{2}{n}.$$ ⑥

当 n 充分大时，$\frac{2}{n}$ 可以小于任何一个给定的正数．这表明，$\left|S-\frac{4}{3}\right|$ 比任一个正数都小，它只能为 0．

我们没有进行直接的计算，就得到了准确的结论：$S=\frac{4}{3}$.

于是，要计算的抛物线弓形面积为 $\frac{3}{2}-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$.

［小问题里的大方法］

如何把 1 分解成 4 个分子为 1 并且分母各不相同的分数之和？

一个简单的解答是 $1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$.

用这个方法，可以把 1 分解成任意多个分子为 1 并且分母各不相同的分数之和！

这种一加一减的表达式变换的方法用处很大．用这种方法不但能计算平方和 $1^2+2^2+\cdots+n^2$，还能计算立方和以及高次方的和．

计算结果显示当 n 很大时 $Q(n)$ 接近 $\frac{4}{3}$，能不能断言 $Q=\frac{4}{3}$ 呢？

不能．因为还不知道 $Q(n)$ 能不能无限接近 $\frac{4}{3}$．

习题 10

已知圆锥的高为 h，底半径为 r．用我们计算抛物线下曲边梯形面积的思路，推导圆锥体积的计算公式．

[提示：(1) 用若干张平行于圆锥底面的平面把它切成 n 块厚度相等的薄片；

(2) 用一系列圆柱的体积近似地代替对应的薄片，圆柱的高为 $\frac{h}{n}$，底半径顺次为

$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \frac{3r}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)r}{n},\ r;$$

(3) 问题归结为计算下列和式当 n 越来越大时所趋向的值

$$V(n)=\left(\frac{h}{n}\right)\times(1^2+2^2+\cdots+n^2)\times\frac{r^2}{n^2}.]$$

4.5.2 计算变力所做的功

问题探索：求能达到要求高度的上抛物体的初速.

把质量为 m 的物体竖直上抛．想要它达到的高度超过 H，初始速度至少是多大?

距离越远，引力越小.

物体运动过程中，受向下的重力作用速度不断减小．如果上抛的高度 H 不大，可以把重力看成常数 mg，问题比较简单，在物理课上已经解决过了．答案是 $v=\sqrt{2gH}$.

如果要达到的高度 H 很大，再把重力看成常数就不妥当了．重力是万有引力，两物体之间的引力计算公式为

$$f(x)=\frac{cmM}{x^2}, \quad ①$$

其中 c 是引力常数，m 和 M 分别是两物体的质量，x 是两物体重心的距离.

从这个公式看出，上抛物体所受的重力会随着高度 x 的增加而减小.

初速越大，飞得越高.

设物体的初速为 v，它具有的动能为 $\frac{mv^2}{2}$．在上抛过程中重力不断做功使其速度减小，直到速度为 0 时开始回落，这时的高度 H 就是它所能达到的高度．在这一过程中重力对物体所做的总功 Q，数值上恰好等于初始动能 $\frac{mv^2}{2}$：

$$Q=\frac{mv^2}{2}. \quad ②$$

如何计算总功 Q 呢?

"化整为零，以直代曲" 仍然有效.

用 x 表示物体与地心的距离，上抛运动开始时 $x=R$，R 是地球的直径．设上抛高度超过了 H，当高度为 H 时，$x=R+H$．要计算的是重力在 R 到 $R+H$ 这段路程上所做的功.

仍然用化整为零的思想．如图 4－39，把路程区间 $[R, R+H]$ 等分为 n 小段，记分点顺次为

$$R=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=R+H.$$

每一小段路程的长度为

$$d=\frac{H}{n}. \qquad ③$$

回顾上次数学实验的经验，有时不见得要真的计算．所以这次不做实验了，只是务虚，探索．

设在第 k 段路程上重力做的功为 q_k，则 $q_1+q_2+\cdots+q_n=Q$．在第 k 段路程上物体受的重力最大为 $f(x_{k-1})$ 且最小为 $f(x_k)$，可见

$f(x_k)d<q_k<f(x_{k-1})d \quad (k=1, 2, \cdots, n).$

具体来说

$$f(x_1)d<q_1<f(x_0)d,$$
$$f(x_2)d<q_2<f(x_1)d,$$
$$f(x_3)d<q_3<f(x_2)d,$$
$$\cdots\cdots$$
$$f(x_n)d<q_n<f(x_{n-1})d.$$

简单地说，n 个等分点处的引力函数值的算术平均值乘路程区间的长度，就是总功 Q 的近似值 $Q(n)$．

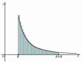


图 4－39

你一定发现了：变力做的功的计算和曲边梯形的面积的计算在数学上是一样的．

加起来，注意 $q_1+q_2+\cdots+q_n=Q$，得到

$(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))d<Q<(f(x_0)+\cdots+f(x_{n-1}))d.$

记

$$Q(n)=(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1}))d, \qquad ④$$

则前式简化为

$$Q(n)-(f(x_0)-f(x_n))d<Q<Q(n).$$

移项，注意到 $f(x)$ 恒为正且为递减，得到不等式：

$$|Q-Q(n)|<f(x_0)d=\frac{cmMH}{nR^2}. \qquad ⑤$$

因而当 n 足够大时 $Q(n)$ 可以充分接近 Q.

至于如何具体求出 Q 的值，后面多学一点，就容易解决了．

习题 11

计算函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[a,b]$ 上的曲边梯形面积．进一步证明，一般二次函数 f 在 $[a,b]$ 上的曲边梯形面积等于

$$\frac{f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{6}.$$

作为应用，尝试推导计算球、球台、球缺、圆锥、棱锥、圆台、棱台等一系列几何体体积的“万能公式”．

阅读材料

用速度战胜地球引力

人类要飞向太空必须首先挣脱地球引力的“枷锁”，而战胜引力的诀窍是提高运动速度.

从研究两个质点在万有引力作用下的运动规律出发，人们通常把航天器达到环绕地球、脱离地球和飞出太阳系所需要的最小速度，分别称为第一宇宙速度、第二宇宙速度和第三宇宙速度.

第一宇宙速度（v_1）航天器沿地球表面做圆周运动时必须具备的速度，也叫环绕速度．按照力学理论可以计算出

$$v_1=7.9\ \text{km/s}.$$

第二宇宙速度（v_2）当航天器超过第一宇宙速度 v_1 达到一定值时，它就会脱离地球的引力场而成为围绕太阳运行的人造行星，这个速度就叫作第二宇宙速度，亦称逃逸速度．按照力学理论可以计算出第二宇宙速度 $v_2=11.2$ km/s．由于月球还未超出地球引力的范围，故从地面发射探月航天器，其初始速度不小于 10.848 km/s 即可.

第三宇宙速度（v_3）从地球表面发射航天器，飞出太阳系，到浩瀚的银河系中漫游所需要的最小速度，就叫作第三宇宙速度．按照力学理论可以计算出第三宇宙速度 $v_3=16.7$ km/s.

4.5.3 定积分的概念

积分记号是拉长了的字母 S，这表示计算积分是求和的推广。这个记号是 17 世纪德国数学家莱布尼茨引进的。

我们看到，曲边梯形面积的计算、变化的力所做功的计算以及圆锥体积的计算，其数学模型都是一样的，都相当于计算一个函数 $f(x)$ 在某个区间 $[a,b]$ 上的曲边梯形的面积。这曲边梯形的面积，也叫作 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分**(definite integral)。记号为

$$Q=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

式中的变量 x 可以换成任意字母，意义不变。a 和 b 分别叫作定积分的下限和上限。$f(x)$ 叫作被积函数，$[a, b]$ 叫作积分区间。

所以，函数 $y=\sin x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的定积分为 0。

前面考虑的问题中被积函数是正的，定积分的值 Q 也为正。如果被积函数是负的，函数曲线在横坐标轴之下，定积分的值就是带负号的曲边梯形的面积。当被积函数在积分区间上有正有负时，定积分就是横坐标轴之上的正的面积与横坐标轴之下的负的面积的代数和。

从更多实际问题中体会定积分概念。

例 1 汽车走过的路程。

汽车的速度计能够把轮轴旋转的当前速度测出并转化为汽车前进的速度，这项工作由一个电路连续进行，并通过指针显示出来。可以把指针指示的速度 v 作为时间 t 的函数 $v(t)$，并画出其函数曲线。这时，曲边梯形的面积，就代表了汽车在对应的时段所走的路程 s，如图 4－40 所示。汽车上有一组精密的齿轮来完成面积计算的工作。

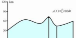


图 4－40

它们随时把当前的速度转化为这一瞬间新走过的路程，并显示在里程表上．这里的被积函数的值是实时测出的，没有表达式，定积分的上限在不断变化，定积分的值是上限(时间)的函数．

想一想，为什么速度函数在时间区间上的定积分相当于这一时段走过的路程？

例 2 闸板所受压力．

水库泻洪闸宽为 3 m，库内水位比库外水位高 4 m，闸板所受的总水压是多少？

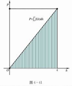


图 4－41

定积分可以是面积，定积分可以是体积，定积分可以是功，定积分可以是路程，定积分可以是压力，还有更多更多．

闸板所受水压的压强随水深的增加而增加，是水深 h 的函数，记作 $f(h)$．把闸板沿水平方向等分成 n 条，由上而下第 k 根分界线处的水深 $h_k=\frac{4k}{n}$，再约定 $h_0=0$，$h_n=4$，则第 k 条上的压强在 $f(h_{k-1})$ 和 $f(h_k)$ 之间．第 k 条所受压力 P_k 满足不等式：

$$\frac{12f(h_{k-1})}{n}<P_k<\frac{12f(h_k)}{n}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

将此不等式对 k 求和得到：

$$\frac{12\left(f\left(\frac{0}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+f\left(\frac{8}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{4(n-1)}{n}\right)\right)}{n}<P$$

$$<\frac{12\left(f\left(\frac{4}{n}\right)+f\left(\frac{8}{n}\right)+\cdots+f(4)\right)}{n}.$$

记 $P(n)=\dfrac{12\left(f\left(\frac{0}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+f\left(\frac{8}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{4(n-1)}{n}\right)\right)}{n}$，

则 $$|P-P(n)|<\frac{12f(4)}{n}.$$

这表明，当 n 足够大时，和式 $P(n)$ 可以充分接近所求的总压力 P.

上述计算过程，相当于计算函数 $f(h)$ 在 $[0,4]$ 上的曲边梯形面积，也就是 $f(h)$ 在区间 $[0,4]$ 上的定积分.

物理知识告诉我们，压强 $f(h)$ 与水深成正比，所以被积函数 $f(h)=ch$，这里常数 c 可以根据选取的物理单位来确定．函数 $f(h)$ 的图象是一段直线，曲边梯形这时成了三角形.

如果你还算不出所求的压力，只有复习一下物理知识了.

定积分概念可以不依赖面积.

用"曲边梯形的面积"定义"定积分"概念，既方便又直观．不过它依赖于几何，依赖于面积概念．要知道，严谨地定义一般图形面积并不是简单的事情．另外，在应用定积分处理实际问题时，常常要说明，该问题相当于计算一个曲边梯形的面积，要绕弯子.

可不是吗？我们还没有定义过曲线包围的面积呢！

几何和物理中的问题启发我们引进数学概念，而数学概念一旦形成，就应当有它的独立性和抽象性，才便于深入研究并找到新的应用领域.

多啰嗦呀！

严谨是要付出代价的．如果不严谨，就说不清楚，就无法论证，就要付出更大代价.

从上述一系列事例中，可以提炼出定积分的下列数学定义：

设 $f(x)$ 是在区间 $[a,b]$ 上有定义的函数，在 a，b 之间取若干分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

记小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 为 Δ_k，其长度 (x_k-x_{k-1}) 记作 Δx_k，Δx_k 中最大的记作 d．再在每个小区间 Δ_k 上任取一点代表点 z_k，作和式：

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k. \qquad ①$$

如果（不论如何取分点 x_k 和代表点 z_k）当 d 趋于 0 时和式①以

S 为极限，就说函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，并且说 S 是 f 在 $[a, b]$ 上的定积分，记作

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

"当 d 趋于 0 时和式①以 S 为极限"，意思是"当 d 越来越小时，和式①越来越接近于 S，要多接近，就有多接近".

别担心这个"如果"，初等函数都是连续函数，而连续函数总是可积的.

这也就给出了曲边梯形面积的定义.

4.5.4 微积分基本定理

思路与方法：

前面计算 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分 Q 的步骤为：

（1）化整为零，插入等分点.

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,\ x_k-x_{k-1}=d=\frac{b-a}{n}. \quad ①$$

记 Q_k 为 $f(x)$ 在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的定积分，即 $f(x)$ 的曲线在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上构成的小曲边梯形面积，则

$$Q=Q_0+Q_1+\cdots+Q_{n-1}. \quad ②$$

（2）以直代曲，估计误差.

用小矩形面积 $f(x_k)d$ 代替小曲边梯形的面积 Q_k，这些小矩形面积之和为

$$Q(n)=(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1}))d. \quad ③$$

通过估计误差说明 $Q(n)$ 能够任意接近要计算的定积分 Q.

在前面两个问题中，以直代曲的估计误差利用了函数 $f(x)$ 的单调性和区间的等分条件. 一般说来，只要 $f(x)$ 在长为 d 的小区间上的变化幅度不超过 Md（这里 M 是某个常数），就能证明 $Q(n)$ 能够任意接近要计算的定积分 Q. 事实上，容易估计出以直代曲的总误差不会超过区间长度 $b-a$ 与 $f(x)$ 在各个小区间上的变化幅度中的最大者之积. 如果在不一定等分时用 d 表示最大的小区间的长度，总误差就不超过 $M(b-a)d$ 了.

根据前面所学的有关导数的知识就知道，这个条件对初等函数总是满足的.

（3）积零成整，精益求精.

在前面，运气不错，对于 $f(x)=x^2$，找到了 $F(x)=\frac{x^3}{3}$；对于 $f(x)=\frac{1}{x^2}$，找到了 $F(x)=-\frac{1}{x}$；其实，对于许多 $f(x)$，这样的 $F(x)$ 不是初等函数．不过这不是坏事，数学家就此发现了许多新的函数．

如果能找到一个函数 $F(x)$，在 $[a, b]$ 上满足条件

$$f(x)d=F(x+d)-F(x)+c(x,d)d^2, \quad ④$$

其中 $c(x, d)$ 的绝对值不超过某个常数 c．

取 $x=x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 顺次代入上式并将各式相加得

$$Q(n)=F(b)-F(a)+(c(x_0,d)+c(x_1,d)+\cdots c(x_{n-1},d))d^2. \quad ⑤$$

因为括弧里共有 n 项，每项绝对值都不超过 c，所以有

$$|Q(n)-(F(b)-F(a))|<ncd^2=\frac{c(b-a)^2}{n}. \quad ⑥$$

这表明只要 n 足够大，$Q(n)$ 能够任意接近 $F(b)-F(a)$．

综合（2）和（3），可知 $|Q-(F(b)-F(a))|$ 可以小于任意一个指定的正数，它只能为 0．也就是说：

$$Q=F(b)-F(a). \quad ⑦$$

把上面的推理和计算总结一下，得到：

［微积分基本定理的原始形式］ 设 f 和 F 都是在闭区间 $[a, b]$ 上有定义的函数，M 和 N 是两个正数．如果下面两个条件都满足：

（1）$f(x)$ 在长为 d 的小区间上的变化幅度小于 Md（也就是说，对 $[a, b]$ 上的任意两点 r，s，只要 $|r-s|<d$，就有 $|f(r)-f(s)|<Md$．这保证了化整为零以直代曲的有效性）；

（2）$|(F(x+d)-F(x))-f(x)d|<Nd^2$（这就是条件④，这使得我们可以积零成整），

则有 $$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a).$$

原来要辛辛苦苦地计算，现在只要检查两个条件．

再精打细算，上述定理中条件（1）、（2）都可以放宽：

在(1)中的条件"对 $[a, b]$ 上的任意两点 r，s，只要 $|r-s|<d$，就有 $|f(r)-f(s)|<Md$"中，Md 可以放宽为 $\frac{1}{w(d)}$，这里 $w(d)$ 是在某个区间 $(0, h]$ 上定义的正值递减无界函数．

这个条件可以简单地说成"$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续"．

在(2)中的条件"$|(F(x+d)-F(x))-f(x)d|<Nd^2$"中，两端用 d 来除，得到 $\left|\frac{F(x+d)-F(x)}{d}-f(x)\right|<Nd$，这同样可以放

宽为 $\left|\frac{F(x+d)-F(x)}{d}-f(x)\right|<\frac{1}{w(d)}$. 这表明 $\frac{F(x+d)-F(x)}{d}$ 的极限是 $f(x)$.

也就是说，条件(2)可以简单地说成"$f(x)$是$F(x)$的导数".

至此，我们得到了重要的

[微积分基本定理]　如果 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上有定义的连续函数，$F(x)$在 $[a, b]$ 上可微并且 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a).$$

数学家先是找到了求定积分的方法，随后又发现了计算导数以求切线的法则，可是就是这个看似自然而平凡的事实，在半个世纪当中未被发现.

牛顿和莱布尼茨发现了并且明确表述了微积分基本定理，标志着微积分学的诞生.

从图上直观理解微积分基本定理.

图 4－42 画出了 $[a, b]$ 上的函数 $y=F(x)$ 的曲线，设 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数. 取分点：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

记 $x_{k+1}-x_k=\Delta x_k$，显然有

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1})-F(x_k))$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{x_{k+1}-x_k}\right)\Delta x_k,$$

左端和式里的分式 $\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$ 就是图中对应的小直角三角形的斜边的斜率. 分点越密，这斜率越接近于曲线在点$(x_k, F(x_k))$处的切线的斜率，也就是 $F(x)$ 在 x_k 处的导数 $F'(x_k)$. 所以这和式越来越接近和式

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k.$$

水落石出，真相大白，现在只要查查导数表就能算出许多！

而当分点无限加密时，最后的这个和式就成了 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分.

微积分基本定理，直观上就是如此简单.

温故知新，用新知识解老问题

例 1　求函数 $f(x)=1+x^2$ 在 $[0, 1]$ 上的曲边梯形的面积 Q.

解　取 $F(x)=\frac{x^3}{3}+x$，则 $F'(x)=f(x)$. 由微积分基本定理可得：

$$Q=\int_0^1(1+x^2)\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=\frac{4}{3}.$$

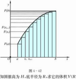


图 4－42

阿基米德可能想不到，抛物线弓形面积的计算如此简单地就解决了.

例 2 已知圆锥高为 H，底半径为 R，求它的体积 $V(R,H)$.

解 这相当于计算函数 $f(x)=\pi\left(\frac{Rx}{H}\right)^2$ 在$[0,H]$上的定积分.

取 $F(x)=\pi\left(\frac{R}{H}\right)^2\frac{x^3}{3}$，则 $F'(x)=f(x)$. 由微积分基本定理可得

$$V(R,H)=\int_0^H\pi\left(\frac{Rx}{H}\right)^2\mathrm{d}x=F(H)-F(0)=\pi\frac{HR^2}{3}.$$

例 3 质量为 m 的物体由地面上升到高度为 H 之处，求在此运动过程中地心引力对物体所做的功 $W(H)$.（参看 4.5.2 的问题探索）

解 设地球半径为 R，质量为 M，万有引力常数为 c，则此问题相当于计算函数 $f(x)=\frac{cmM}{x^2}$在区间$[R,R+H]$上的定积分.

关键是如何把体积的计算问题以及类似的实际问题转化为求定积分的问题.

取 $F(x)=-\frac{cmM}{x}$，则 $F'(x)=f(x)$. 由微积分基本定理可得：

$$W(H)=\int_R^{R+H}\frac{cmM}{x^2}\mathrm{d}x=F(R+H)-F(R)$$

$$=cmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+H}\right).$$

原来花了九牛二虎之力，现在却得来全不费工夫，数学思想就是如此美妙.

例 4 已知变速运动物体的速度 v(m/s)与时间 t(s)的关系为 $v(t)=a+bt$，问它出发后 30 s 走了多远？

解 这相当于计算函数 $v(t)=a+bt$ 在$[0,30]$上的定积分.

取 $F(t)=at+\frac{bt^2}{2}$，则 $F'(t)=v(t)$. 由微积分基本定理可得

$$\int_0^{30}(a+bt)\mathrm{d}t=F(30)-F(0)=30a+450b.$$

故它出发后 30 s 走了$(30a+450b)$m.

从阿基米德求抛物线弓形面积，到牛顿和莱布尼茨创立微积分，这两千年数学家们的持续探索，取得了人类精神的最高胜利.

在短短的几个星期里，匆匆一瞥品尝了许多大师辛勤劳动之果，若有点困惑疑难，一点也不奇怪，结合实际反复思考，会越想越明白.

习题 12

学而时习之

1. 求函数 $f(x)=x^2$ 在$[0,1]$上的曲边梯形的面积.
2. 求图 4－43 所示图形的面积 S.

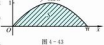


图 4－43

3. 求直线 $y=r\left(1-\frac{x}{h}\right)(h>0,r>0)$及两条坐标轴所围成的三角形绕 x 轴旋转而成旋转体的体积.
4. 已知自由落体的运动速度 $v=gt$(g 是常数)，求在时间区间$[0,t]$内，物体下落的距离 s.
5. 物体在力 $F(x)=3x+4$(单位:N)的作用下，沿与力 F 相同的方向，从 $x=0$ 处运动到 $x=4$ 处(单位:m)，求力 $F(x)$做的功.

温故而知新

6. 试推导半径为 R 的球体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

小结与复习

一、指导思想

微积分的创立是人类科学文化史上的一件大事，是数学发展中的一座里程碑．它的发展和应用标志着近代数学时期的到来．

我们引进了函数概念，自然界和人类社会中的大量实际问题中的数量关系可以用变量和函数的数学模型来刻画．如何研究这大量的丰富多彩的函数呢？正是微积分的创立，提供了研究变量和函数的重要的方法和有效的手段．

导数概念是微积分的核心概念之一，它有着极其丰富的实际背景和广泛的应用．导数是函数的导数．函数概念的丰富性决定了导数的实际背景和应用的丰富性．

物理上的运动方程可以表示成函数，研究物体运动就要考虑平均速度和瞬时速度．平均速度向瞬时速度的过渡，引出了导数概念．

函数可以用几何上的曲线表示．研究曲线涉及割线和切线．割线斜率向切线斜率的逼近，同样引向导数概念．

各种各样的实际问题中提出的函数模型，都刻画了变化的过程．要度量变化的快慢就用到变化率．从平均变化率到瞬时变化率的过渡，自然要产生导数概念．

导数概念一旦形成，就在研究函数的性质中显示出了威力．我们曾经用过不同的方法讨论函数的单调性和极值问题，导数方法则提供了最一般的简洁有力的解决方案．

计算曲线包围的面积，是一类古老的数学难题．这类问题的研究引出了定积分概念，揭示出导数和定积分这两个概念之间的深刻关系，从而解决了面积计算的大量难题，这是微积分学科诞生的标志．

导数概念和定积分概念的产生，体现出新的数学思想和数学方法.

求瞬时速度的时候，求切线斜率的时候，开始我们不知道什么是瞬时速度，不知道什么是切线．我们面临的任务是双重的：既要建立瞬时速度的概念和切线的概念，又要找到计算的方法．这样一箭双雕的处理，是微积分中常用的思想和方法.

求瞬时速度，求切线斜率，求函数的导数和定积分，计算工作是在一个无穷逼近过程中完成的．这种作极限运算，它不同于学过的四则运算和函数运算，是充满新意的一种数学运算，它给数学注入了新的力量，新的思想．对极限运算的理论探讨和应用研究，在牛顿、莱布尼茨创立微积分之后，持续了200年之久!

学习这一章，我们要着重体会导数的思想及其丰富的内涵；感受新的数学思想和方法在解决实际问题中的力量；初步了解微积分的文化价值，为以后进一步学习微积分打下基础.

二、内容提要

1．导数概念及其几何意义.

（1）从平均速度过渡到瞬时速度；

（2）用割线斜率逼近切线斜率；

（3）函数的平均变化率趋于瞬时变化率，即导数.

2．导数的运算.

（1）几个幂函数的导数公式的由来；

（2）基本初等函数的求导公式和导数运算基本法则.

3．导数在研究函数中的运用.

（1）根据导数的正负判断函数的增减性；

（2）函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；

（3）三次函数的增减性和极值及它在闭区间上的最值.

4．来自生活实践的若干优化问题的案例.

5．定积分和微积分基本定理.

（1）曲边梯形的面积和变力做功的计算；

（2）定积分的概念；

（3）微积分基本定理.

6．微积分创立的简史及其在人类文化中的意义和价值.

三、学习要求和要注意的问题

1．了解导数概念的实际背景和几何意义.

（1）通过由物体运动的平均速度过渡到瞬时速度的过程，了解导数概念的物理背景.

（2）通过观察分析曲线的割线逼近切线时其斜率的变化趋势，直观地理解导数概念的几何意义.

（3）通过对大量实例的分析，经历由函数的平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道函数的瞬时变化率就是导数，体会导数的思想和内涵.

（4）注意，这里所说的变化，在数学上是指自变量改变时对应的函数值的变化．所谓变化率，就是函数值的改变量和对应的自变量的改变量的比值，即差分和步长的比．但这里的步长可正可负.

（5）函数的导数也是函数，所以就有导数的导数，即二次导数；对二次导数的物理意义和几何意义，应有初步的了解.

2．掌握一些函数的求导方法.

（1）能够根据定义求下列函数的导数：

$$y=c,\ y=x,\ y=x^2,\ y=x^3,\ y=\frac{1}{x},\ y=\sqrt{x};$$

（2）能够使用导数公式表和导数的四则运算法则求简单函数的导数；

（3）知道了函数 $f(x)$ 的导数，会求函数 $f(ax+b)$ 的导数；

（4）了解求导运算有两种记号，知道可以用记号表示是对哪个参数求导.

3．能够应用导数研究函数的性质.

（1）通过对大量函数及其导数图象的观察，了解函数的增减和

导数的正负之间的关系．

（2）结合函数的图象，了解函数在某一点取得极值的必要条件和充分条件．

（3）会用导数求不超过三次的多项式函数的极大值和极小值，以及它在闭区间上的最大值和最小值；体会导数方法在研究函数性质中的一般性和有效性．

（4）注意有些函数在极值点可能没有导数，例如函数 $y=|x|$，这点以后再研究．

4．增强应用意识，用导数方法解决一些实际中提出的优化问题，如利润最大、用料最省、效率最高等问题．特别注意如何从实际问题中选择适当的自变量，确定目标函数，把实际问题提炼成自己能够解决的数学问题．

5．初步了解定积分和微积分基本定理．

（1）通过求曲边梯形的面积和变力所做的功等实例，了解定积分的实际背景；借助几何直观体会定积分的基本思想，初步了解定积分的概念．

（2）通过实例，直观地了解微积分基本定理的含义．

（3）利用导数表和微积分基本定理，计算几个曲边梯形的面积，初步体会微积分基本定理的力量．

6．了解微积分的文化价值．

阅读课本上的材料，从网上或其他书刊上收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料，进行交流；体会微积分的建立在人类文化发展中的意义和价值．

四、参考例题

例1 竖直上抛的一个物体，其高度 h（m）和抛出时间 t（s）之间有函数关系

$$h=f(t)=2+10t-4.9t^2.$$

（1）求物体抛出的初速，以及抛出 2 s 后的瞬时速度和高度；并问这时物体在上升还是下降？

(2) 此物体在抛出后多久达到最高点，此时高度是多少?

解 (1) 求出 $f(t)$ 的导数

$$f'(t)=10-9.8t.$$

$f'(0)=10$，即上抛初速为 10 m/s;

$f'(2)=-9.6$，即抛出后 2 秒时瞬时速度为 -9.6 m/s，瞬时速度为负，表明此时物体在下降;

物体此时高度为 $f(2)=2.4$ m.

(2) 物体到达最高点时，其瞬时速度为 0，即

$$f'(t)=10-9.8t=0.$$

解得 $t\approx 1.02$，即物体在抛出后 1.02 s 达到最高点，此时物体的高度为 $f(1.02)\approx 7.1$ (m).

例 2 研究函数

$$g(x)=\sqrt{1+x}-ax\ (x>-1)$$

的增减性和极值.

解 求导数得

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-a.$$

分两种情形:

若 $a\leqslant 0$，$g'(x)$ 恒为正，$g(x)$ 递增;

若 $a>0$，解方程

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-a=0,$$

得

$$x=r=\frac{1}{4a^2}-1.$$

于是可知，$g'(x)$ 在 $(-1,r)$ 上为正，在 $(r,+\infty)$ 上为负，$g'(r)=0$. 可见，$g(x)$ 在 $(-1,r)$ 上递增，在 $(r,+\infty)$ 上递减，在 $x=r$ 处取到极大值.

例 3 设计一种正四棱柱形冰箱，它有一个冷冻室和一个冷藏室，冷藏室用两层隔板分为三个抽屉. 问：如何设计它的外形尺

寸，能使得冰箱体积 $V=0.5$ (m^3) 为定值时，它的表面和三层隔板（包括冷冻室的底层）面积之和 S 值最小.

解 设冰箱高度为 h，底面正方形边长为 x ($x>0$)，则有

$$V=x^2h=0.5,\quad h=\frac{0.5}{x^2}.$$

$$S=S(x)=5x^2+4xh=5x^2+\frac{2}{x}.$$

问题化为求 $S(x)$ 的最小值. 将 $S(x)$ 求导数得：

$$S'(x)=10x-\frac{2}{x^2}.$$

解方程 $S'(x)=0$ 得 $x=0.58$. 易见 $10x$ 和 $-\frac{2}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增，故 $S'(x)$ 在 $(0, 0.58)$ 上为负，在 $(0.58, +\infty)$ 上为正，即 $S(x)$ 在 $(0, 0.58)$ 上递减，在 $(0.58, +\infty)$ 上递增，在 $x=0.58$ 处取到最小值. 对应地，$h=1.49$，可见冰箱底面正方形边长为 0.58 m，高度为 1.49 m 较为合理.

例 4 利用微积分基本定理求抛物线 $y=x^2-5x$ 被 x 轴所截得的弓形的面积.

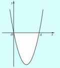


图 4-44

解 如图 4-44，曲线和 x 轴的两个交点为 $O(0, 0)$、$A(5, 0)$，要计算的弓形面积就是函数 $f(x)=x^2-5x$ 在 $[0, 5]$ 上的

定积分．根据微积分基本定理，如果有 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f'(x)$，则所求的定积分等于 $F(5)-F(0)$．

从导数公式表可以看出，

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}$$

的导数等于 $f(x)$，故所求弓形面积等于

$$|F(5)-F(0)|=\frac{125}{6}=20.83.$$

复 习 题 四

学而时习之

1. 根据所给的运动方程，先写出物体在时间段 $[u, u+d]$ 和 $[u-d, u]$ 上的平均速度，再让 d 趋于 0，求出它在 $t=u$ 处的瞬时速度．

(1) $s(t)=a+vt$；　　(2) $s(t)=\frac{gt^2}{2}$；

(3) $s(t)=5+3t-\frac{gt^2}{2}$；　　(4) $s(t)=2t^2-5t+c$．

2. 根据所给的函数表达式，先写出函数曲线的过两指定点 P，Q 的割线的斜率，再让指定点 Q 趋于点 P，求出曲线在点 P 处的切线的斜率．

(1) $y=c(x)=3, P=(2,3), Q=(2+h,3)$；

(2) $y=L(x)=\frac{x}{2}+1, P=(2u,u+1), Q=(2u+h,L(2u+h))$；

(3) $y=f(x)=x-x^2, P=(2,-2), Q=(2+h,f(2+h))$；

(4) $y=g(x)=x^2-2x, P=(2,4), Q=(2+d,g(2+d))$；

(5) $y=D(x)=\frac{2}{x+1}, P=(1,1), Q=(1+h,D(1+h))$．

3. 写出下列几何量关于自变量在指定区间 $[u, v]$ 上的平均变化率和在该区间两端点的瞬时变化率．

(1) 边长为 x 的正方形的周长，$u=a$，$v=b$ $(a<b)$；

(2) 边长为 x 的正三角形的面积，$u=0$，$v=c$ ($c>0$)；

(3) 半径为 x 的圆的面积，$u=1$，$v=R$ ($R>1$)；

(4) 直径为 x 的球的表面积，$u=1$，$v=D$ ($D>1$)；

(5) 半径为 x 的球的体积，$u=r$，$v=R$ ($R>r>0$).

4. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=\sin(x+3t)$；　　(2) $f(x)=e^{ax}$；

(3) $f(x)=2s^3+\frac{s}{x}-7xs+\sin e^s$.

5. 求下列函数的导数，并指出函数的单调区间.

(1) $y=-x^3-2x^2-4x+5$；　　(2) $y=3x^4-4x^3-12x^2+18$；

(3) $y=(x+1)(x^2-1)$.

6. 求下列函数的极值：

(1) $y=x^3-3x^2-9x+5$；　　(2) $y=x^3-12x^2+18x+1$；

(3) $y=2-(x^2-1)^2$；　　(4) $y=x+\frac{a^2}{x}$ ($a>0$).

7. 求下列函数在所给区间上的最大值与最小值：

(1) $y=2x^3-15x^2+36x-24$，$x\in[1,4]$；

(2) $y=x^2-3x+5$，$x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$.

8. 已知物体的运动方程是 $s=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$.

(1) 什么时间位移为 0？

(2) 什么时间速度为 0？

9. (1) 求内接于半径为 R 的球并且体积最大的圆柱的高；

(2) 求内接于半径为 R 的球并且体积最大的圆锥的高.

10. 一窗户的上部是半圆，下部是矩形. 如果窗户面积一定，当圆半径与矩形高的比为何值时，窗户周长最小？

11. 利用定积分的几何意义说明：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x.$$

12. 根据定积分的几何意义求下列积分：

(1) $\int_a^b x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

13. 图 4－45，一桥拱的形状为抛物线，该抛物线拱的高为 h，宽为 b.

求证：抛物线拱的面积 $S=\frac{2}{3}bh$.

图 4-45

温故而知新

14. 求下列函数的导数：

(1) $y=3\sin x+2\cos x$；　　(2) $y=(x-1)(x^2+x+1)$；

(3) $y=x^2(x^2-1)$；　　(4) $y=(x^m+a^m)(x^n+a^n)$；

(5) $y=\sin^2(3x)\cos^3(4x)$；　　(6) $y=2(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})$；

(7) $y=a^{2x+1}$；　　(8) $y=\dfrac{x\ln x}{x+1}-\ln(x+1)$.

15. 求曲线 $y=x^2+px+q$ 与 x 轴相切的条件.

16. 求曲线 $y=5\sqrt{x}$ 与直线 $y=2x-4$ 平行的切线的方程.

17. 试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取极值？它是极大值还是极小值？并求此极值.

18. 如果函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$，试证明 $f(x)$ 无极值.

19. 用总长 14.8 m 的钢条制作一个长方体容器框架，如果所制容器的底面的一边比另一边长 0.5 m，那么高为多少时，容器的容积最大？并求出最大容积.

20. 生产某种产品的成本 $C(x)$，总收益 R 为产品价格 p 与产量 x 之积，即 $R=px$. 如果成本函数 $C(x)=x^3-84x^2+1900x+500$，试求产量 x 为多少时，所获利润最大.

21. 利用定积分的几何意义，求下列各式的值：

(1) $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$；　　(2) $\int_{0}^{1}\left(\sqrt{1-(x-1)^2}-x\right)dx$.

22. 设 $f(x)$ 是偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，用定积分的几何意义说明下式成立：

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx.$$

23. 在区间 $[a,b]$ 上，若 $f(x)>0$，$f'(x)>0$，试用几何图形说明下列不等式

成立：

$$f(a)(b-a)<\int_a^b f(x)\,dx<f(b)(b-a).$$

上下而求索

24. 等差数列与等比数列的项数相同，它们的一切项数都是正的，且有相同的首项、末项，试比较两数列的各项之和的大小，并证明你的判断.

25. 根据 4.5.4 中例 3 的结果和 4.5.2 的问题，计算垂直上抛物体脱离地球引力所需的初速.（注意利用地球半径和重力常数等数据.）

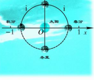
第 5 章 数系的扩充与复数

平方得负岂荒唐？

左转两番朝后方.

加减乘除依旧算，

方程有解没商量.



人类认识数的范围是一步一步扩充的.

引进了虚数单位 i 作为方程 $x^2=-1$ 的根，数的范围就从实数扩充到复数.

“虚数”不虚，它不但是数学理论中不可缺少的一部分，而且在人类的生活、生产和科学研究中有着重要的应用.

5.1 解方程与数系的扩充

人类所认识的数的范围是一步一步扩充的.

这种扩充，一方面是由于描述和解决实际问题的需要，另一方面也是由于解决数学自身的矛盾的需要.

比如，最开始人们为了表示物体个数而认识了正整数，并且引入了加、减、乘、除四则运算．正整数做加法与乘法可以通行无阻，但减法与除法就不行了．什么叫减法？就是已知两数的和 a 与其中一个加数 b，求另一个加数的运算．求 $a-b$ 就是求一个 x 使 $x+b=a$，这就是解方程．同样，除法也是解方程：求 $a\div b$ 就是解方程 $bx=a$．

0 的引入，一方面固然是来自实际的需要，比如为了表示“没有物体”，表示计量的起点（比如计量温度、计量距离），等等．但是它也使减法 $a-a$ 可以进行，方程 $x+a=a$ 有解.

分数的引入当然有实际的需要，比如用一把尺去度量某一个长度，不能正好量尽时，需要将尺平均分割成更小的长度单位再去度量．但这就使除数 b 不为 0 时除法 $a\div b$ 不但对整数 a，b 总能进行，而且对分数 a，b 也总能进行，也就是说：方程 $bx=a$（$b\neq 0$）在非负的有理数范围内总是有解.

为了表示具有相反意义的量，引入了负数，这就将数的范围扩大到了全体有理数，这使得减法 $a-b$ 可以畅通无阻，方程 $x+b=a$ 总是有解.

在有理数范围内四则运算通行无阻（除数为 0 例外），但解方程还不行．比如 $x^2=2$ 就没有有理数解，但是它的解却是客观存在的：正方形的对角线长与边长之比就是这个方程的解．但这个比不能用有理数表示．这促使数的范围扩大到全体实数．任意两条线段的长度比都可以用实数表示．任意一个非负实数都有任意 n 次的方根，也就是说：当 n 为正整数时，方程 $x^n=a$ 当 $a\geqslant 0$ 时总有解．但是，当

$a<0$时 $x^2=a$ 没有解，即使 $x^2=-1$ 这样简单的方程都没有解，-1 没有平方根.

这启发我们对数系作再一次的扩充．具体做法是：引进一个新的数，用符号 i 来代表，它满足条件 $\mathrm{i}^2=-1$．并且规定这个新的数 i 可以按照我们熟悉的运算法则以及一个新的法则 $\mathrm{i}^2=-1$ 与实数进行运算，产生一批新的数，与原来的全体实数一起组成一个新的数系.

5.2 复数的概念

规定一个符号 i 代表一个数，满足条件 $\mathrm{i}^2=-1$．称这个 i 为**虚数单位**．并且允许它与任意一个实数 b 相乘得到数 $b\mathrm{i}$，还可以再与任意一个实数 a 相加得到数 $a+b\mathrm{i}$．

形如 $a+b\mathrm{i}$（其中 a，b 是实数）的数称为**复数**（complex number），其中 a 称为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的**实部**（real part），$b\mathrm{i}$ 称为 $a+b\mathrm{i}$ 的**虚部**（imaginary part），b 称为 $a+b\mathrm{i}$ 的**虚部系数**（coefficient of imaginary part）.

通常将复数 z 的实部记作 $\mathrm{Re}\,z$，将它的虚部系数记作 $\mathrm{Im}\,z$．

两个复数 $a+b\mathrm{i}$，$c+d\mathrm{i}$（a，b，c，d 是实数）相等的充分必要条件为：它们的实部相等，且虚部系数相等，即 $a=c$ 且 $b=d$．

例 求以下复数的实部和虚部系数.

(1) $1-\mathrm{i}$； (2) $3+2\sqrt{2}$； (3) $-\mathrm{i}$.

解 (1) $1-\mathrm{i}=1+(-1)\mathrm{i}$，实部为 1，虚部系数为 -1．

(2) $3+2\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})+0\mathrm{i}$，实部为 $3+2\sqrt{2}$，虚部系数为 0．

(3) $-\mathrm{i}=0+(-1)\mathrm{i}$，实部为 0，虚部系数为 -1．

容易看出，当虚部系数 $b=0$ 时，复数 $a+0\mathrm{i}$ 就是实数 a．反过来，实数 a 也就是虚部系数为 0 的复数 $a+0\mathrm{i}$．

我们习惯上用 **R** 表示全体实数组成的集合，**C** 表示全体复数组

成的集合．于是 $\mathbf{C}=\{a+bi \mid a, b\in\mathbf{R}\}$．而 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{C}$ 的子集合，由 $\mathbf{C}$ 中虚部系数为 0 的全体复数组成．

当虚部系数 $b\neq 0$ 时，复数 $a+bi$ 不是实数，称它们为**虚数**（imaginary number）．特别，实部为 0，虚部不为 0 的复数 bi 称为**纯虚数**（pure imaginary number）．

练　习

1. 在以下哪些范围内做加法可以通行无阻？哪些范围内做乘法可以通行无阻？

   (1) 20 以内的正整数（即，从 1 到 20 的全体整数）；

   (2) 大于 0 的全体偶数；

   (3) 大于 0 的全体奇数；

   (4) 全体正整数；

   (5) 绝对值为 1 的实数．

2. 在以下哪些范围内进行加、减、乘、除运算（做除法时要求除数不为零）可以通行无阻？

   (1) 全体整数；

   (2) 全体有理数；

   (3) 全体实数．

3. 求以下复数的实部和虚部系数：

   (1) $i-1$；　(2) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$；　(3) $2-\sqrt{2}i$；　(4) $-\frac{i}{2}$．

习题　1

学而时习之

1. 下列命题正确的是（　）

   (A) 实数集与复数集的交集是空集　(B) 任何两个复数都不能比较大小

(C) 任何复数的平方均非负　　(D) 虚数集与实数集的并集为复数集

2. 以 $2i-\sqrt{5}$ 的虚部系数为实部，以 $\sqrt{5}i+2i^2$ 的实部为虚部系数的新复数为（　　）

(A) $2-2i$　　(B) $2+i$　　(C) $-\sqrt{5}+\sqrt{5}i$　　(D) $\sqrt{5}+\sqrt{5}i$

3. 复数 $a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）为纯虚数是 $a=0$ 的（　　）

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

温故而知新

4. 求当 m 为何实数时，复数 $z=\frac{m^2-m-6}{m+3}+(m^2-2m-15)i$ 是：

(1) 实数；　(2) 纯虚数；　(3) 虚数.

5.3 复数的四则运算

先尝试利用我们所熟悉的运算律以及等式 $i^2=-1$ 进行两个复数的加、减、乘运算.

例1 已知复数 $z_1=1+2i$ 与 $z_2=4-3i$．试求它们的和 z_1+z_2，差 z_1-z_2，积 z_1z_2．

解 (1) $z_1+z_2=(1+2i)+(4-3i)=(1+4)+(2-3)i=5-i$．

(2) $z_1-z_2=(1+2i)-(4-3i)$

$=(1-4)+[2-(-3)]i=-3+5i$．

(3) $z_1z_2=(1+2i)(4-3i)$

$=1\times4+2i\times4+1\times(-3i)+2i\times(-3i)$

$=4+8i-3i-6i^2$

$=4+8i-3i-6\times(-1)$

$=10+5i$．

容易看出：

两个复数 $a+bi$，$c+di$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$）的加、减、乘运算，可以先看作以 i 为字母的实系数多项式的运算来进行，再将 $i^2=-1$ 代入，将实部和虚部分别合并，就得到最后的结果.

利用 $i^2=-1$ 将表达式化成 i 的一次多项式后，常数项就是实部，一次项就是虚部.

一般地，对任意两个复数 $a+bi$，$c+di$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），有

加法：$(a+bi)+(c+di)=(a+b)+(c+d)i$．

减法：$(a+bi)-(c+di)=(a-b)+(c-d)i$．

乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$．

这些公式不需记忆，只要自己按照多项式展开的法则以及等式 $i^2=-1$ 进行运算就行了.

我们已经会做复数的加、减、乘法，那么，对任意两个复数 $z_1=a+bi$ 和 $z_2=c+di$，当 $z_2\neq0$ 时能否做除法求它们的商 $\frac{z_1}{z_2}$？为此，只要将商

$$\frac{a+bi}{c+di}$$

的分子分母同乘以适当的非零复数，将分母化为实数即可.

注意到

$$(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})=c^2-d^2\mathrm{i}^2=c^2+d^2.$$

当 $c+d\mathrm{i}\neq 0$ 时，实数 c，d 不同时为 0，$c^2+d^2>0$. 因此，将商 $\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}$ 的分子分母同乘以 $c-d\mathrm{i}$ 就可将分母化为正实数 c^2+d^2，从而将商化为复数的标准形式.

$$\begin{aligned}\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}&=\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}\\&=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)\mathrm{i}}{c^2+d^2}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

实际计算时不需记忆这个公式，只要会将分子分母乘以适当的复数，将分母化为正实数就行了. 上面的公式 $(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})=c^2+d^2$ 反而更有用，更值得熟记.

将虚数分母 $c+d\mathrm{i}$ 乘以 $c-d\mathrm{i}$ 化为正实数 c^2+d^2 的过程，类似于在初中化简根式时将含根号的分母 $c+d\sqrt{D}$ 乘以 $c-d\sqrt{D}$ 化为有理式 c^2-d^2D 的过程. 只不过我们现在不是"分母有理化"而是"分母实数化".

例 2 已知复数 $z_1=1+2\mathrm{i}$，$z_2=4-3\mathrm{i}$. 求 z_2^{-1} 及 $\frac{z_1}{z_2}$.

解 $z_2^{-1}=\frac{1}{4-3\mathrm{i}}=\frac{4+3\mathrm{i}}{(4-3\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}=\frac{4+3\mathrm{i}}{4^2+3^2}=\frac{4}{25}+\frac{3}{25}\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{1+2\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}{(4-3\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}\\&=\frac{4+3\mathrm{i}+8\mathrm{i}-6}{4^2+3^2}=-\frac{2}{25}+\frac{11}{25}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

解决了复数的加、减、乘、除四则运算问题，我们再来尝试讨论在复数范围内开平方的问题，也就是求解一元二次方程 $x^2=a$ 的问题. 一元二次方程 $x^2=-1$ 在实数范围内没有解，我们引入一个新的数 i 作为它的一个解，将数的范围扩大到了复数. 这个方程在复数范围内有解 i，同时由 $(-\mathrm{i})^2=\mathrm{i}^2=-1$ 知道方程 $x^2=-1$ 在复数范围内有两个解：i 与 $-\mathrm{i}$. 也就是说，在复数范围内 -1 有两个平方根 $\pm\mathrm{i}$. 很自然要问：除了 -1 以外，别的负实数在复数范围内是否有平方根？进一步可以问，任意复数 $a+b\mathrm{i}$ 在复数范围内是否有平方根？比如 i 是否在复数范围内有平方根？方程 $x^2=\mathrm{i}$ 是否在复数范围内有解？

我们在实数集合之外为 -1 强行规定了一个平方根 i，是否需要在复数集合之外再规定一个什么符号使它的平方等于 i?

例 3 在复数范围内解下列方程：

(1) $z^2=-3$；

(2) $z^2=\mathrm{i}$.

解 (1) 容易验证 $(\pm\sqrt{3}\mathrm{i})^2=(\sqrt{3})^2\mathrm{i}^2=3\times(-1)=-3$，因此 $\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$ 是方程 $x^2=-3$ 的两个根，也就是 -3 的两个平方根.

(2) 设 $z=x+y\mathrm{i}$ 是方程 $z^2=\mathrm{i}$ 的复数根，其中 x，y 是待定实数，则

$$(x+y\mathrm{i})^2=\mathrm{i} \iff (x^2-y^2)+2xy\mathrm{i}=\mathrm{i} \iff \begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 2xy=1. \end{cases}$$

问题归结为在实数范围内求解方程组

$$\begin{cases} x^2-y^2=0, & ① \\ 2xy=1. & ② \end{cases}$$

由①式得 $y=\pm x$，代入②得

$$\pm 2x^2=1.$$

仅当 $y=x$ 时，$2x^2=1$，即 $x^2=\dfrac{1}{2}$ 有实数解 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故关于 x，y 的上述方程组有两组实数解 $y=x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，于是方程 $z^2=\mathrm{i}$ 有两个复数根 $\pm\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$，它们也就是 i 的两个平方根.

例 4 在复数范围内解一元二次方程 $x^2+x+1=0$.

解 判别式 $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3<0$，方程无实数根. 但在复数范围内 -3 有两个平方根 $\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$，由求根公式可得方程的复数解

$$\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

由于在复数范围内开平方已经通行无阻，因此，利用求根公式可以求出任何一个一元二次方程的根. 利用判别式判别实系数一元二次方程是否有根的定理应当修改为：

设 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 是实系数一元二次方程，$\Delta=b^2-4ac$ 是它的判别式，则

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不同的实根 $\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$；

利用这个方法，可求出任意负实数 a 的平方根为 $\pm\sqrt{-a}\,\mathrm{i}$. 注意其中的 $-a$ 是正实数，因而 $\sqrt{-a}$ 是正实数的算术平方根.

容易看出，对任意的复数 $a+b\mathrm{i}$ $(a, b\in\mathbf{R})$，用同样的方法（待定系数法）可求出方程 $z^2=a+b\mathrm{i}$ 的复数根 $z=x+y\mathrm{i}$ $(x, y\in\mathbf{R})$，也就是 $a+b\mathrm{i}$ 的平方根，你不妨一试.

待定系数法也可以用来求两个复数的商 $\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}$，只要由等式 $(x+y\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=a+b\mathrm{i}$ 列出方程组来求待定实数 x，y 就行了. 你愿意试试吗?

当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相同的实根 $-\dfrac{b}{2a}$；

当 $\Delta<0$ 时，方程有两个不同的虚根 $-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\mathrm{i}$.

多知道一点

代数基本定理

在实数范围内，负数没有平方根，因此当实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时方程无实数解．但在复数范围内，当 $\Delta<0$ 时它也有两个平方根 $\pm\sqrt{-\Delta}\mathrm{i}$，因此可以由求根公式求出两个虚根 $-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\mathrm{i}$.

这说明了，在复数范围内，所有的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 都有根，并且可以用求根公式求出它的所有的根．

更进一步，假定一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的系数 a，b，c 都是复数，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 是复数．但不论 Δ 取什么值，在复数范围内总是有平方根（且当 $\Delta\neq0$ 时它总有两个不同的平方根）．因此仍然能够用求根公式求出一元二次方程的全部根（当 $\Delta\neq0$ 时有两个不同的根）．这说明了，在复数范围内解一元二次方程可以通行无阻．

对于更高次数的复系数一元 n 次方程 $a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ $(a_0\neq0)$，一般来说不存在求根公式．但可以证明：不论它的系数取什么复数值，这个一元 n 次方程在复数范围内总是有根．这个结论在代数学发展史上具有重要的意义，称为**代数基本定理**(Fundamental Theorem in Algebra)．这个定理是由高斯首先提出并证明的，现在已经有很多种证明．这些证明都用到大学数学的知识，就不向中学生介绍了．

准确地说，当 $n\geq5$ 时不存在由方程的系数经过加、减、乘、除和开方运算来表示求根公式．

练　习

1. 化简下列各式：

(1) $(1+i)^2$；　　(2) $(1-i)^4$；

(3) $(3+i)(3-i)$；　　(4) $\frac{1+i}{1-i}$.

2. 已知 $m\in\mathbf{R}$，且 $(m+mi)^6=-64i$，求 m 的值.

3. 在复数范围内解下列各方程：

(1) $x^2+2x+3=0$；　　(2) $x^2-4x+5=0$.

习题　2

学而时习之

1. 已知 $a-1+2ai=-4+6i$，a，$b\in\mathbf{R}$，求 a，b 的值.

2. 已知 $a=\frac{-3-i}{1+2i}$，求 a^4 的值.

3. 解方程：$2x^2-x+1=0$.

温故而知新

4. (1) 计算下列各值：i^2，i^3，i^4，i^5；

(2) 根据上述结果，找出规律，并计算 i^{100} 的值；

(3) 化简：$1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}$.

5. 根据下列条件，求 z.

(1) $z(1+i)=2$；

(2) $z-1+zi=-4+4i$.

5.4 复数的几何表示

我们知道，实数可以用一条数轴上的点来表示．具体表示方法如下：取一条规定了方向的直线，在直线上取定一点 O 作为原点，取定一个单位长，则这条直线成为一条数轴．每个实数 a 由数轴上唯一一点 P 表示．记 $\boldsymbol{e}$ 为沿着数轴的正方向、长度等于单位长的向量，则数轴上点 P 与它所表示的实数 a 的关系为 $\overrightarrow{OP}=a\boldsymbol{e}$．也就是说：每个实数 a 都可用平行于数轴的向量 $\overrightarrow{OP}=a\boldsymbol{e}$ 来表示．如图 5－1．

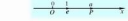


图 5－1

由实数的这种几何表示法得到启发，可以想到用平面上的点和向量来表示复数．在平面上建立直角坐标系，以每个复数 $z=a+bi$ 的实部 a 和虚部系数 b 组成坐标 (a,b)，以 (a,b) 为坐标在平面上可以画出唯一的一个点 $P(a,b)$，同时也决定唯一一个向量 $\overrightarrow{OP}$，这个向量的坐标也是 (a,b)．将复数 $a+bi$ 用平面上这个点 $P(a,b)$ 表示，同时也用平面上这个向量 $\overrightarrow{OP}=(a,b)$ 表示，这就将全体复数与平面上点的集合建立了一一对应关系，也将全体复数与平面上全体向量的集合建立了一一对应关系．如图 5－2．

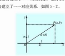


图 5－2

按上述方式与全体复数建立了一一对应关系的平面叫作**复平面**(complex plane)，它的 x 轴由表示实数的所有的点组成，y 轴由表示零或纯虚数的所有的点组成．特别地，数1用沿 x 轴正方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$ 表示，数i用沿 y 轴正方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_2=(0,1)$ 表示．设复平面上的向量 $\boldsymbol{v}$ 的坐标为 (a,b)，则 $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2$，将这个表达式中的 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，分别换成1，i，就得到 $\boldsymbol{v}$ 所表示的复数 $a+bi$．

例1　(1) 在复平面画出分别表示以下复数 z_1，…，z_4 的点 P_1，…，P_4．

$$z_1=1,\quad z_2=\mathrm{i},\quad z_3=4+3\mathrm{i},\quad z_4=4-3\mathrm{i}.$$

(2) 求出表示以上复数的向量 $\overrightarrow{OP_1}$，…，$\overrightarrow{OP_4}$ 的模．试推广你的结论．

(3) 表示以上复数的点中是否有两个点关于实轴对称？它们所代表的复数有什么关系？

解　(1) 如图5-3．

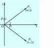


图5-3

(2) 由 P_1，…，P_4 的坐标 $(1,0)$，$(0,1)$，$(4,3)$，$(4,-3)$ 分别算出各向量的模为

$$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=1,\quad |\overrightarrow{OP_3}|=\sqrt{4^2+3^2}=5=|\overrightarrow{OP_4}|.$$

一般地，由表示复数 $a+bi$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标为 (a,b) 可求出它的模为 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{a^2+b^2}$．

(3) 点 $P_3(4,3)$，$P_4(4,-3)$ 关于实轴对称，它们所表示的复数 $4+3\mathrm{i}$ 与 $4-3\mathrm{i}$ 的实部相同，虚部系数互为相反数．

对任意复数 $z=a+bi$，我们将它在复平面上所对应的向量的模 $\sqrt{a^2+b^2}$ 称为复数 z 的**模**（module），也称为 z 的绝对值，记作 $|z|$．写成公式，即

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2},$$

其中 a，$b\in\mathbf{R}$．

想一想，当复数 z 是实数时，用这个公式算出 $|z|$ 是否与以前熟悉的绝对值一致？

对任意复数 $z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$），如果保持它的实部 a 不变，将虚部系数 b 变成它的相反数 $-b$，得到的复数 $a-bi$ 称为原来的复数 z 的**共轭复数**（conjugate complex number），记为 $\bar{z}$．也就是说

$$\overline{a+bi}=a-bi.$$

当然，反过来也有 $\overline{a-bi}=a+bi$，因此 $\bar{\bar{z}}=z$．

于是，例 1 的（3）的结论可以推广为：

复平面上两点 P，Q 关于 x 轴对称 $\Leftrightarrow$ 它们所代表的复数相互共轭．

做除法时用到的重要公式

$$(c+di)(c-di)=c^2+d^2$$

可以重新叙述为

$$z\bar{z}=|z|^2,\quad 即\quad |z|=\sqrt{z\bar{z}}.$$

如图 5－4，设复数 $z=a+bi$，$w=c+di$ 分别由向量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ 表示，即 $\overrightarrow{OP}=(a,\ b)$，$\overrightarrow{OQ}=(c,\ d)$．则这两个复数的和 $z+w=(a+c)+(b+d)i$ 由向量 $\overrightarrow{OS}=(a+c,\ b+d)=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ 表示，OS 是以 OP，OQ 为邻边的平行四边形的对角线．这也就是说，复数 z，w 的加法由对应的向量 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ 的加法来表示．

图 5－4

类似地，复数的减法由对应的向量的减法来表示：

$$z-w=(a-c)+(b-d)\mathrm{i} \to \overrightarrow{OD}=(a-c,\ b-d)=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ},$$

OD 与 QP 同向平行且长度相等；复数 z 与任一实数 k 的乘法由复数对应的向量$\overrightarrow{OP}$与 k 的乘法表示：

$$kz=ka+kb\mathrm{i} \ \to\ \overrightarrow{OM}=(ka,\ kb)=k\overrightarrow{OP}.$$

例 2 如图 5-5，已知 $OACB$ 是复平面上的平行四边形，O 是原点，A，B 分别表示复数 $3+\mathrm{i}$，$2+4\mathrm{i}$，M 是 OC，AB 的交点.

求 C，M 表示的复数.

图 5-5

解 由于$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$分别代表 $3+\mathrm{i}$，$2+4\mathrm{i}$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$代表的复数为$(3+\mathrm{i})+(2+4\mathrm{i})=5+5\mathrm{i}$，这也就是 C 代表的复数.

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$代表的复数为$\frac{1}{2}(5+5\mathrm{i})=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$，这也就是 M 代表的复数.

例 3 （1）求方程 $z^3=1$ 的全部根.

（2）将方程 $z^3=1$ 的所有的根都用复平面上的点表示. 观察：以这些点为顶点组成的多边形是什么形状，处于什么位置？

这也就是求 1 的立方根. 在实数范围内显然只有一个根 1，但在复数范围内则不止这一个根.

解 （1）原方程即 $z^3-1=0$. 方程左边可分解因式：

$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1).$$

因此，原方程为

$$(z-1)(z^2+z+1)=0.$$

即

$$z-1=0 \text{ 或 } z^2+z+1=0.$$

第一个方程 $z-1=0$ 只有一个根 1.

第二个方程 $z^2+z+1=0$ 是一元二次方程，利用求根公式来得它在复数范围内有两个根：

5.3 例 4 解过这个方程，还记得吗？

$$\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

于是原来的三次方程 $z^3=1$ 在复数范围内有三个根 1，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

也就是说，在复数范围内，1 有上述三个立方根，而不止一个立方根 1.

（2）复平面上表示这三个根 1，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 的点 P_1，P_2，P_3 如图 5-6：

图 5-6

观察发现，以这些点为顶点的 $\triangle P_1P_2P_3$ 是正三角形，内接于以原点为圆心、半径为 1 的圆.

如果你有兴趣，不妨用因式分解的方法解方程 $z^3=1$，并将根全部画在复平面上，看看能发现什么有趣的现象.

阅读与思考

$i^2=-1$ 的几何意义

用平面向量来表示复数，使复数有了几何意义，我们已知道了复数的加减运算的几何意义，但还不知道复数乘法的几何意义，因此还不知道 $i^2=-1$ 有什么意义，也就是两个 i 相乘为什么得 -1.

要解释 $i^2=-1$，先看 $(-1)^2=1$ 的几何意义．将平面上每个向量 $\boldsymbol{v}$ 用从原点 O 出发的有向线段 OP 来表示，用 -1 乘 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP}$ 将它变为 $-\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP'}$，其效果是将 OP 绕 O 旋转 $180°$ 变为 OP'，同时也就将平面上每个点 P 绕 O 旋转 $180°$ 变为 P'，也就是关于 O 作中心对称．将向量 $\overrightarrow{OP}$ 乘 $(-1)^2$，也就是乘了 -1 再乘 -1，转了 $180°$ 再转 $180°$，就是转 $360°$，每条这样的有向线段 OP 都转回原来的位置，相当于乘了 1．这就是说 $(-1)^2=1$.

图 5－7

向量乘 -1 是旋转 $180°$，可以将这个旋转平均分成两次来完成，每次旋转 $90°$，连转两次就是转 $180°$（如图 5－7）．假如规定一个新的数 i，将复平面上每个向量 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OP}$ 乘 i 就是沿逆时针方向旋转 $90°$，那么乘 i^2 就是连续旋转两个 $90°$，也就是旋转了 $180°$，相当于乘 -1．这就说明了 $i^2=-1$.

平面向量 $\boldsymbol{v}$ 乘 i 是沿逆时针方向旋转 $90°$，那么，$\boldsymbol{v}$ 乘任意一个复数 $a+bi$（其中 a，$b\in\mathbf{R}$），又是什么意思呢？

由
$$(a+bi)\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}+bi\boldsymbol{v}$$
可知，$\boldsymbol{v}$ 的 $a+bi$ 倍等于 $\boldsymbol{v}$ 的 a 倍加上 $i\boldsymbol{v}$ 的 b 倍，其中 $i\boldsymbol{v}$ 是由 $\boldsymbol{v}$ 沿逆时针方向旋转 $90°$ 得到的向量.

特别地，将 x 轴正方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$ 乘 $a+bi$ 得到
$$(a+bi)\boldsymbol{e}_1=a\boldsymbol{e}_1+bi\boldsymbol{e}_1=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2.$$

既然复数由向量代表，容易认为复数相乘由向量的数量积代表．请自己举例验证看是否如此．比如，i 由 y 正方向上的单位向量 $\boldsymbol{e}_2$ 代表，i 与 i 的乘积是否等于 $\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的数量积？又如，i 与 $1+i$ 的乘积是否等于它们所对应的向量的数量积？

$(-1)^2=1$，可以用两句诗来说明："后转两次转向前，负负为正很显然"．向量乘 -1 就是向后转，连乘两个 -1 就是后转再后转，回到原来的位置.

沿逆时针方向旋转 $90°$，俗话说就是"向左转"．"左转再左转，等于向后转"，就是 $i^2=-1$．本章开始的诗句"平方得负岂荒唐，左转两番朝后方"说的就是这个意思．"左转两番朝后方"是众所周知的常识，有什么荒唐和虚幻的呢？当然，"右转两番朝后方"也是对的，这就是说 $(-i)^2=-1$，-1 有两个平方根 $\pm i$.

注意 $i\boldsymbol{e}_1$ 就是将 $\boldsymbol{e}_1$"向左转"，得到的就是 $\boldsymbol{e}_2$.

平面上每个向量 $\boldsymbol{u}=\overrightarrow{OP}$ 都有一个坐标 (a, b)，能写成 $a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2=(a+b\mathrm{i})\boldsymbol{e}_1$ 的形式，因而 $\boldsymbol{u}$ 可以看作是 $\boldsymbol{e}_1$ 的 $(a+b\mathrm{i})$ 倍．

既然 $\boldsymbol{e}_1$ 表示实数 1，$\boldsymbol{e}_1$ 的 $a+b\mathrm{i}$ 倍当然就应当表示 1 的 $a+b\mathrm{i}$ 倍，也就是表示复数 $a+b\mathrm{i}$．

设 $\boldsymbol{v}$ 是复平面上任意一个向量，表示复数 $c+d\mathrm{i}$，也就是说 $\boldsymbol{v}=(c+d\mathrm{i})\boldsymbol{e}_1$．那么，$\boldsymbol{v}$ 的 $a+b\mathrm{i}$ 倍

$$(a+b\mathrm{i})\boldsymbol{v}=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})\boldsymbol{e}_1,$$

它表示的复数就是 $(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})$，是 $c+d\mathrm{i}$ 的 $a+b\mathrm{i}$ 倍．

这就是复数乘法的几何意义．可以总结如下：

设复数 $w=c+d\mathrm{i}$ 由向量 $\boldsymbol{v}$ 表示，则 w 的 $a+b\mathrm{i}$ 倍由向量 $(a+b\mathrm{i})\boldsymbol{v}$ 即 $a\boldsymbol{v}+b\mathrm{i}\boldsymbol{v}$ 表示．

比如 i 由 $\boldsymbol{e}_2$ 表示，i^2 就由向量 $\mathrm{i}\boldsymbol{e}_2$ 表示．$\mathrm{i}\boldsymbol{e}_2$ 由 $\boldsymbol{e}_2$ 沿逆时针方向旋转 90° 得到，就是 $-\boldsymbol{e}_1$，它表示的复数是 -1，因而 $\mathrm{i}^2=-1$．

在 5.3 例 3 中用代数方法解过这个方程，现在用几何方法再解一遍．

例 1　试利用复数乘法的几何意义求方程 $z^2=\mathrm{i}$ 的复数解．

解　代表 i 的向量是 $\boldsymbol{e}_2$，它可以由 $\boldsymbol{e}_1$ 沿逆时针方向旋转 90° 得到．假如每次只旋转 45°，那么旋转两次就是旋转 90°．如果能求出复数 w，使每个向量 $\overrightarrow{OP}$ 乘 w 得到的 $\overrightarrow{OP'}$ 可以由 OP 沿逆时针方向旋转 45°，得到，则 $w^2=\mathrm{i}$．

为了求出这样的 $w=a+b\mathrm{i}$，不妨先将 $\boldsymbol{e}_1=\overrightarrow{OA}$ 乘 $a+b\mathrm{i}$ 变到 $\overrightarrow{OA'}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2$．

一方面，$\overrightarrow{OA'}$ 代表的复数就是 $a+b\mathrm{i}$，点 A' 的坐标为 (a, b)．另一方面，有向线段 OA' 可由 OA 旋转 45° 得到，因此 $r=|OA'|=|OA|=1$，$\angle AOA'=45°$，由三角函数的定义知

$$\cos 45°=\frac{a}{r}=\frac{a}{1}=a，\sin 45°=\frac{b}{r}=\frac{b}{1}=b．$$

因而

$$w=\cos 45°+\mathrm{i}\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}．$$

画图容易验证，不但 $\boldsymbol{e}_1$ 乘 $w=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ 的效果是旋转 45°，任何一个向量 $\overrightarrow{OP}$ 乘 w 变到 $\overrightarrow{OP'}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OP}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\overrightarrow{OP}$ 也都是将 OP 旋转 45°．

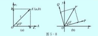


图 5-8

向量乘 w^2 就是旋转 $90°$，因而 $w^2=\mathrm{i}$.

还有 $(-w)^2=\mathrm{i}$. 因此方程 $z^2=\mathrm{i}$ 有两个根 $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$.

例 1 中的思路和方法可以推广到旋转任意角 α 的情形，假如将 $e_1=\overrightarrow{OA}$ 沿逆时针方向旋转任意角 α 到 $\overrightarrow{OA'}$，则点 A' 的坐标为 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$，向量 $\overrightarrow{OA'}$ 代表的复数是 $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$. 将向量 e_1 乘复数 $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ 的效果是将 OA 绕原点沿逆时针方向旋转 α. 不难画出图形来证明，将每个向量 $\overrightarrow{OP}$ 乘复数 $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ 的效果都是将 OP 绕原点沿逆时针方向旋转同一个角 α.

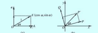


图 5-9

将向量 $\overrightarrow{OP}$ 先乘复数 $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$，再乘 $\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta$，效果是将 OP 先旋转角 α，再旋转角 β，总的效果是旋转 $\alpha+\beta$. 由此可知

$$(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta),$$

进而有 $$(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+\mathrm{i}\sin n\alpha.$$

再来看复平面上的向量乘任一复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的效果.

设复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 由向量 $\overrightarrow{OM}$ 表示，则点 M 的坐标为 (a,b)，$r=|z|=|OM|=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0$.

当 $z\neq 0$ 时 $r>0$，设 $\alpha=\angle xOM$ 是以 Ox 为始边，OM 为终边的角（如图 5-10），则由三角函数的定义得

$$\cos\alpha=\frac{a}{r},\qquad \sin\alpha=\frac{b}{r}.$$

在图 5-8 (b) 中，OP' 由 OP 旋转 $45°$，得到 $\overrightarrow{OQ}=\mathrm{i}\overrightarrow{OP}$. 观察 $\overrightarrow{OP'}$ 是否等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OP}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\overrightarrow{OP}$？

从 e_1 旋转到 e_2 不但可以旋转 $90°$，也可以旋转 $90°+360°$ 即 $450°$. 将旋转 $450°$ 平均分成两次来进行，每次旋转 $\left(\frac{450}{2}\right)°$，即旋转 $225°$.

想一想，e_1 旋转 $225°$ 相当于乘什么复数？是否正好就是 $-w$？

实际上，由 e_1 旋转到 e_2 还可以旋转 $45°+k\cdot 360°$，其中 k 是任意整数. 将这样的旋转平均分成两次进行，是否还能得出 $\pm w$ 之外的根？

在图 5-9 (b) 中，不难观察到

$\overrightarrow{OP'}=(\cos\alpha)\overrightarrow{OP}+(\sin\alpha)\overrightarrow{OQ}=(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\overrightarrow{OP}$.

图 5-10

$$a=r\cos\alpha,\qquad b=r\sin\alpha,$$

$$a+b\mathrm{i}=r\cos\alpha+\mathrm{i}\,r\sin\alpha$$
$$=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha).$$

当 $z=0$ 时，任取 α，$z=0=r(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$仍成立.

由此可见，任一复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 都可以写成 $|z|(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$的形式，称为 z 的**三角函数式**.

两个复数 $z_1=|z_1|(\cos\alpha_1+\mathrm{i}\sin\alpha_1)$，$z_2=|z_2|(\cos\alpha_2+\mathrm{i}\sin\alpha_2)$相等的充分必要条件是 $|z_1|=|z_2|$，且当 $z_1\neq0$ 时 $\alpha_2=\alpha_1+2k\pi$，k 为整数.

将任一向量$\overrightarrow{OP}$乘 $z=|z|(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$，可以将$\overrightarrow{OP}$先乘 $\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$ 再乘$|z|$，其效果是：先将 OP 绕 O 旋转角 α 到 OP_1；再将 OP_1 保持方向不变，长度变为原来的 $|z|$ 倍.

设非零复数 z_1，z_2 分别由向量$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$表示，则

$z_1=z_2\Leftrightarrow OP_1$ 与 OP_2 重合$\Leftrightarrow|OP_1|=|OP_2|$，且 α_1,α_2 的终边相同$\Leftrightarrow|z_1|=|z_2|$且 $\alpha_2=\alpha_1+2k\pi$，k 为整数.

例 2 试利用复数的三角函数式求方程 $z^3=1$ 的复数解.

解 设 $z=|z|(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$.

$$z^3=1\Rightarrow|z|^3=1\Rightarrow|z|=1\Rightarrow z=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha,$$

$$z^3=\cos3\alpha+\mathrm{i}\sin3\alpha=1=\cos0+\mathrm{i}\sin0\Leftrightarrow$$

$$3\alpha=2k\pi,\ \alpha=\frac{2k\pi}{3},\ k\text{ 为整数},$$

$$z=\cos\frac{2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3}.$$

在 $[0,2\pi)$ 范围内不同的角$\frac{2k\pi}{3}$只有 0，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$，由此得到三个不同的 z 值为：0（当 $k=0$）；$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$（当 $k=1$）；$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$（当 $k=2$）. 这就是方程 $z^3=1$ 的三个根，它们在复平面上对应的点都在以原点为圆心的单位圆上，且将单位圆周三等分.

请与 5.4 例 4 相比较，结果是否相同？你更喜欢哪一种方法？

你能否仿照例 2 的方法求出方程 $z^n=1$ 的所有的复数根？这些根在复平面上对应的点的位置有何特点？

练　习

1. 复数 $z=(a^2-2a)+(a^2-a-2)\text{i}$ 对应点在虚轴上，则实数 $a=$_______.
2. 若复数 $(-3+k^2)-(k^2-2)\text{i}$ 所对应的点在第三象限内，求实数 k 的取值范围.

习题 3

学而时习之

1. 已知复数 $z_1=3+\text{i}$，$z_2=1-\text{i}$，则 $z=z_1\cdot z_2$ 在复平面内对应的点位于第______象限.
2. 已知 $z=1+\text{i}$，复平面内将 z 所对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转到与之对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 重合时，所转过的最小角为（　　）

   (A) $90°$　　(B) $180°$　　(C) $270°$　　(D) $-90°$

温故而知新

3. 假如 $a+b\text{i}=c+d\text{i}$，a，b，c，$d\in\mathbf{R}$，但 $a\neq b$ 或 $c\neq d$，会发生什么矛盾？
4. z 是任意复数，求证：

   (1) $z+\bar{z}$ 是实数；　　(2) z 是实数 $\Leftrightarrow \bar{z}=z$.

小结与复习

一、指导思想

在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系.

二、主要内容

1. 复数及其相关概念：

（1）虚数单位：i（其中 $i^2=-1$）；

（2）复数：具有形如 $a+bi$（其中 a，b 是实数）的数称为复数，其中 a 称为复数 $a+bi$ 的实部，bi 称为 $a+bi$ 的虚部，b 称为 $a+bi$ 的虚部系数；

（3）虚数：当 $b\neq 0$ 时，$a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$）为虚数．特别地，bi（$b\neq 0$）叫纯虚数；

（4）复数的模：若 $z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$），则复数 z 的模为 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$；

（5）共轭复数：$a+bi$ 与 $a-bi$ 互为共轭复数．即 $\overline{a+bi}=a-bi$．

2. 复数相等的充要条件：

$$a+bi=c+di\ (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a=c, \\ b=d. \end{cases}$$

3. 复数的四则运算：一般地，对任意两个复数 $a+bi$，$c+di$（a，b，c，$d\in\mathbf{R}$），

加法：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$；

减法：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$；

乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

除法：当 $c+di\neq 0$ 时，$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$.

4. 在复数范围解简单的方程.

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求：

(1) 理解复数的基本概念以及复数相等的充要条件；

(2) 了解复数的代数表示法及其几何意义；

(3) 能进行复数代数形式的四则运算，了解复数代数形式的加、减运算的几何意义.

2. 需要注意的问题：

(1) 在复数概念与运算的教学中，应注意避免繁琐的计算与技巧训练；

(2) 注意向量与复数的几何意义相结合.

四、参考例题

例1 设 $z\in\mathbf{C}$，求满足条件 $z+\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$ 且 $|z-2|=2$ 的复数 z.

解 设 $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$，

则 $z+\frac{1}{z}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}$.

$\therefore$ $z+\frac{1}{z}=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$.

$\because$ $z+\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$，$\therefore$ $b-\frac{b}{a^2+b^2}=0$.

$\therefore$ $b=0$ 或 $a^2+b^2=1$.

又$\because$ $|z-2|=2$，$\therefore$ $|(a-2)+bi|=2$. $\therefore$ $(a-2)^2+b^2=4$.

(1) 当 $b=0$ 时，$(a-2)^2=4$，$\therefore$ $a=4$ 或 $a=0$，$\because$ $z\neq 0$，$\therefore$ $z=4$.

(2) 当 $a^2+b^2=1$ 时，$\therefore$ $(a-2)^2+1-a^2=4$. $\therefore$ $a=\frac{1}{4}$.

$\therefore$ $b=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$. $\therefore$ $z=\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{15}}{4}i$.

综合（1）、（2）得　$z=4$ 或 $z=\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{15}}{4}\mathrm{i}$.

例 2　已知复数 z 满足 $|z|=\sqrt{2}$，z^2 的虚部系数为 2，z 所对应的点 A 在第一象限.

（1）求 z；（2）若 z，z^2，$z-z^2$ 在复平面上对应点分别为 A，B，C，求 $\cos\angle ABC$.

解　（1）令 $z=x+y\mathrm{i}$，$\because |z|=\sqrt{2}$，$\therefore$　$x^2+y^2=2$.　①

又$\because$　$z^2=(x+y\mathrm{i})^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$，$\therefore$　$2xy=2$，$\therefore$　$xy=1$.　②

由①、②可解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}$

$\therefore$　$z=1+\mathrm{i}$ 或 $z=1-\mathrm{i}$.

又$\because$　x，$y>0$，$\therefore$　$z=1+\mathrm{i}$.

（2）$z^2=(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$，$z-z^2=1+\mathrm{i}-2\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$.

如图 5－11 所示.

图 5－11

$\therefore$　$A(1,1)$，$B(0,2)$，$C(1,-1)$.

$\therefore$　$\overrightarrow{BA}=(1,-1)$，$\overrightarrow{BC}=(1,-3)$.

$\therefore$　$\cos\angle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{1+3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

复 习 题 五

学而时习之

1. 对于下列四个命题：

（1）任何复数的模都是非负数；

（2）x 轴是复平面的实轴，y 轴是虚轴；

（3）$z_1=\sqrt{5}\mathrm{i}$，$z_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}\mathrm{i}$，$z_3=-\sqrt{5}$，$z_4=2-\mathrm{i}$，则这些复数的对应点共圆；

(4) $|\cos\theta+i\sin\theta|$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 0．其中有（　　）个正确命题．

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2．若复数 $z=\sin 2a-i(1-\cos 2a)$ 是纯虚数，$a\in[0,2\pi)$，则 $a=$______．

3．若复数 $z_1=2-i$，$z_2=1-3i$，则 $\frac{1}{z_1}+\frac{\overline{z_2}}{5}$ 的虚部为______．

4．把复数 $1+i$ 对应的点向右平移一个单位，再向下平移一个单位得到点 A，把所得向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 $90°$，得到向量 $\overrightarrow{OB}$，则 B 点对应的复数为______．

温故而知新

5．求满足下列各条件的复数 z．

(1) $\bar{z}i=i-1$；(2) $z^2-z+2=0$；(3) $|z|-\bar{z}=\frac{10}{1-2i}$；(4) $z^2=7+24i$．

6．已知 $z_1, z_2\in\mathbf{C}$，$|z_1|=\sqrt{3}$，$|z_2|=\sqrt{2}$，$|z_1+z_2|=2\sqrt{2}$，求 $|z_1-z_2|$．

7．已知 $|z|=2$，求 $|z-i|$ 的最大值．

8．$\triangle ABC$ 的 $\angle A$，$\angle B$ 所对的边长为 a，b，设复数 $z_1=a+bi$，$z_2=\cos A+i\cos B$，且 $z_1\cdot z_2$ 所对应点落在虚轴上．试判断 $\triangle ABC$ 的形状．

上下而求索

复数与几何

9．已知角 α，用几何作图法在复平面上作出表示 $\cos\alpha+i\sin\alpha$ 的点 P．试叙述作图步骤．

10．设圆 O 是以原点 O 为圆心、半径为 1 的圆，P 是圆上一点，已知 $\angle xOP=\alpha$，求点 P 表示的复数．

11．对任意角 α，β，计算并化简：

(1) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$；　(2) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2$；

(3) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3$；　(4) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$．

12．当 α 取什么值的时候，下面的等式成立？

(1) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^2=1$；　(2) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=1$．

13．求方程 $z^n=1$ 的所有复数根，将这些根用复平面上的点表示．这些点为顶点组成什么样的多边形？

数学文化

数系扩充小史

自然数的原始概念在人类的文字尚未出现时即已形成．例如前人清点猎物的数目，拿过一只猎物（例如山鸡）就扳一个指头，或在一个小土坑里放上一颗石子，或在绳子上打一个结．这些事物的多寡都是自然形成的，所以后人称其为自然数．由于双手有 10 个指头，所以古代中国和印度等国发明了十进制记数法．南美洲气候炎热，那里古代人类打赤脚，所以古玛雅文明中有 20 进制．自然数的概念究竟是何年何地的人们首先创立，是不可考究的事了．据考古学家估计大约在 5 万年以前，有的甚至说 30 万年以前，人类已有自然数的概念．公元前 5 世纪左右，中国发明了数字（从一到九）：𝍩 𝍪 𝍫 𝍬 𝍭 𝍮 𝍯 𝍰 𝍱．而且我国古代人已有一一对应计数的观念，例如想数数人有多少，则问“几口人?”想知道牛有多少，则问“几头牛?”人与嘴一一对应，牛与头一一对应．自然数是数学的祖先．19 世纪，德国数学家克罗内克说：“上帝创造了自然数，其余（数学）都是人造的．”

公元元年左右，中国《九章算术》中由除法与减法引入了分数和负数．

公元 876 年，印度人首先把零当成数看待，且创造了数字 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9．公元 9 世纪由阿拉伯数学家花拉子米把这 10 个数字引入欧洲．由于花氏是阿拉伯人，欧洲人误称 0，1，…，9 为阿拉伯数字．其实应正名为印度数字．但已沿袭多年的“阿拉伯数字”之称，不易改变称谓了．

公元前 6 世纪毕达哥拉斯学派的著名数学家希伯苏斯提问单位

正方形的对角线有多长．当时毕达哥拉斯学派的信条是“万物皆数”，他们和当时全人类都认为数就是正分数和正整数，此外不存在别的什么数．但由勾股定理，单位正方形对角长 l 应满足 $l^2=2$，若 $l=\frac{q}{p}$ 是既约分数，则会引出矛盾．为了维护毕达哥拉斯的尊严和世俗对数的偏见与无知，毕氏竟因此下令把他的得意门生希帕苏斯投入爱琴海，葬身鱼腹．但问题并没有解决，对角线是物，它的长就应该是数．但这个数不是毕达哥拉斯时代的人们所知道的数，于是出现了第一次数学危机．当然应当承认事实，而不是事实服从传统的观念，所以从那之后人们发现了一种不是自然数与分数的数，名曰“无理数”．无理数比负数发现得早，数学家们把有理数与无理数统称为实数．但直到 19 世纪，数学上才搞清楚了什么是无理数，什么是实数．

1545 年，意大利著名数学家卡丹用三次方程 $x^3=px+q$（p，$q>0$）的求根公式 $x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ 求解时，面对负数开平方但又不能把这种数舍去的局面，例如 $x^3=15x+4$，它有一个根 x_1 是 4，而把 $p=15$，$q=4$ 代入公式则得这个根

$$x_1=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

卡丹叹道：“对这种量进行运算，感到道德上的折磨，但结果令人满意．”卡丹称诸如 $\sqrt{-121}$ 这种负数开平方的量为“诡辩量”，但这里已经不能再像过去解一元二次方程那样见到 $\Delta=b^2-4ac<0$，则声称根在实数范围无意义而舍弃．事实上，如果这时把 x_1 舍弃，舍弃的是实根 4．所以人们开始接受负数开平方的运算，确认运算结果也是一个数．1637 年，笛卡儿称负数开平方的结果是“虚数”．

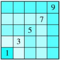
1797 年，挪威数学家韦塞尔对 $a+b\sqrt{-1}$ 作出几何解释，平面直角坐标系中，若一点 P 的坐标为（a，b），则向量 $\overrightarrow{OP}$ 用复数 $a+b\sqrt{-1}$ 表示．1801 年，高斯引入记号 $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$，复数 $a+b\sqrt{-1}$ 写成

$a+bi$。

数系扩充的谱图如下：

第6章 推理与证明

久病成医信不虚，庖丁解牛未足奇.
青山踏遍寻真谛，斗室神游识玄机.
力学定律通宇宙，几何公理贯中西.
有理有据走天下，文章千古叹神笔.



“推理与证明”是数学的基本思维过程，也是人们生活和学习中经常使用的思维方式. 推理一般包括合情推理和演绎推理. 本章将通过对已学知识的回顾，进一步体会合情推理、演绎推理以及二者之间的联系与差异，体会数学证明的特点，了解数学证明的基本方法.

6.1　合情推理和演绎推理

合情推理（plausible reasoning）的意思是“合乎情理”的推理. 在日常生活中，律师对案情的论证分析就是合情推理. 数学中的合情推理有多种多样，最常见的就是归纳和类比.

6.1.1　归纳

在物理、化学、生物、医学等许多实验科学的研究中，用归纳推理来验证一条定律、一条假说是常有的事. 理论对不对，用实验来验证.

农谚“瑞雪兆丰年”、“霜下东风一日晴”等，就是农民根据多年的实践经验进行归纳的结果.

用手扔出的石子，它要掉下来. 再扔一个玻璃球，它也要掉下来. 再扔一个苹果，它还是要掉下来. 我们会想到：不管扔的是什么东西，它都是要掉下来的；进一步去想这是为什么，想到最后，认为是由于地球有引力. 但是，我们并没有把每件东西都扔上去试一试. 试了若干次，就认为可以相信这是普遍规律.

像这样由一系列有限的特殊事例得出一般结论的推理方法叫作**归纳**（induction）.

归纳常常从观察开始. 一个生物学家会观察鸟的生活，一个晶体学家会观察晶体的形状，一个数学家会观察数和形.

$1+3+5+7+9=5^2$

例 1　观察下列等式：

$$1=1^2,$$
$$1+3=2^2,$$
$$1+3+5=3^2,$$
$$1+3+5+7=4^2,$$
$$1+3+5+7+9=5^2,$$
$$\cdots\cdots$$

通过对上面几个式子的观察，我们可以推测这样一个结论：“对任何正整数 n，等式 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 成立.”

例 2　探求凸多面体的面数、顶点数、棱数之间的关系（欧拉公

式的发现）.

欧拉曾观察一些特殊的多面体，如立方体、三棱柱、五棱柱、四棱锥、三棱锥、五棱锥、八面体、塔顶体（正方体上放一个四棱锥）（图 6－1(a)）、截角立方体（图 6－1(b)）等．我们将每个多面体的面数 F、顶点数 V、棱数 E 列成表 6.1：

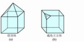


图 6－1

欧拉（Euler，1707—1783）瑞士数学家、物理学家．欧拉是数学史上最多产的数学家，而且涉猎广，人们把他称为“数学界的莎士比亚”．

表 6.1

多面体	面数（F）	顶点数（V）	棱数（E）
三棱锥	4	4	6
方（四）棱柱	5	5	8
三棱柱	5	6	9
五棱锥	6	6	10
立方体	6	8	12
八面体	8	6	12
五棱柱	7	10	15
截角立方体	7	10	15
塔顶体	9	9	16
二十面体	20	12	30
十二面体	12	20	30
有 n 个侧面的棱柱	$n+2$	$2n$	$3n$
有 n 个侧面的棱锥	$n+1$	$n+1$	$2n$
多面体多棱锥顶形	$F+n+1$	$V+1$	$E+n$
多面体 n 棱角形	$F+n$	$V+n+1$	$E+n$

运用归纳推理的一般步骤为：首先，通过观察特例发现某些共性或一般规律；然后，把这种共性推广为一般命题（猜想）；最后，对所得出的一般性猜想进行检验和证明．

首先考虑特殊的多面体的面数、顶点数与棱数，并思考如下问题：

（1）面数是否随着顶点数目的增大而增大？否．（如塔顶体与截

角立方体）

（2）棱数是否随着面数或顶点数的增大而增大？否．（如八面体与五棱柱，塔顶体与截角立方体）

进一步考虑：尽管 F 和 V 均非始终如一地随着 E 的增大而增大，但总趋势似乎是增大的，即 $F+V$ 是在不断增大的．那么是否有"任何多面体的面数加顶点数与棱有同增趋势"？

由表中数据可知成立：

$$V+F-E=2.$$

从而，欧拉得出猜想：任意多面体的面数 F、顶点数 V、棱数 E 满足：

$$V+F-E=2.$$

后来欧拉证明了这个猜想是正确的，这就是著名的欧拉公式．

用归纳推理可以帮助我们从具体事例中发现一般规律．但是应该注意，仅根据一系列有限的特殊事例所得出的一般结论不一定可靠，只是一种合情推理，其结论正确与否，还需要经过理论的证明和实践的检验．

例 3 设 $f(x)=x^2+x+11$，取 $x=1，2，3，\cdots，9$，则

$f(1)=13$，$f(2)=17$，$f(3)=23$，

$f(4)=31$，$f(5)=41$，$f(6)=53$，

$f(7)=67$，$f(8)=83$，$f(9)=101$．

可以看出，这些都是质数．

从这些特殊情况似乎可以归纳出：当 x 为正整数时，$f(x)=x^2+x+11$ 的值都是质数．但经过进一步检验发现这个结论是错误的．

事实上，当 $x=10$ 时，$f(10)=10^2+10+11=121$，这是个合数．

尽管由归纳推理所得的结论未必是可靠的，还需进一步检验．但它由特殊到一般，由具体到抽象的认识功能，对于科学的发现却是十分有用的．观察、实验，对有限的资料作归纳整理，提出猜想，乃是科学研究的最基本的方法之一．

多知道一点

哥德巴赫猜想

观察

$6=3+3$，

$8=3+5$，

$10=3+7=5+5$，

$12=5+7$，

$14=3+11=7+7$，

$16=3+13=5+11$，

……

归纳猜想：任何一个大于4的偶数都可以表示成两个奇素数之和．这就是著名的哥德巴赫猜想，这个猜想至今没有得到证明．

练 习

1. 如图6－2的三角形数组是我国古代数学家杨辉发现的，称为杨辉三角形．根据图中的数构成的规律，a所表示的数是______．

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & & 1 & & 4 & & a & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

图6－2

2. 观察下列等式：

$1^3=1^2$，

$1^3+2^3=3^2$，

$1^3+2^3+3^3=6^2$，

$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$，

……

想一想，等式左边各项幂的底数与右边幂的底数有什么关系？猜一猜可以引出什么规律．

习题 1

学而时习之

1. 等比数列的通项公式.

设等比数列$\{a_n\}$的公比是 q，那么

$a_2=a_1q$，

$a_3=a_2q=a_1q^2$，

$a_4=a_3q=a_1q^3$，

……

由此，猜想等比数列的通项公式是 $a_n=$______.

2. 下列各列数都依照一定的规律排列，在括号里填上适当的数.

（1）1，5，9，13，17，（ ）；

（2）$\frac{2}{3}$，1，$1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{4}$，$3\frac{3}{8}$，（ ）.

3. 如图 6-3，图（a）是棱长为 a 的小正方体，图（b）、图（c）由这样的小正方体摆放而成．按照这样的方法继续摆放，自上而下分别叫第一层，第二层，…，第 n 层．第 n 层的小正方体的个数记为 S_n．解答下列问题：

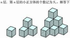


图 6-3

（1）按照要求填表．

n	1	2	3	4	…
S_n	1	3	6		…

（2）$S_{10}=$________.

（3）$S_n=$________.

温故而知新

4．求凸 n 边形的内角和．

5．(1) 图 6－4 的 (a)、(b)、(c)、(d) 为四个平面图．数一数，每个平面图各有多少个顶点？多少条边？它们围成了多少个区域？请将结果填入下表．

(a)　(b)　(c)　(d)

图 6－4

	顶点数	边数	区域数
(a)	4	6	3
(b)			
(c)			
(d)			

(2) 观察上表，推断一个平面图的顶点数、边数、区域数之间有什么关系？

(3) 现已知某个平面图有 999 个顶点，且围成了 999 个区域，试根据以上关系确定这个图有多少条边．

6.1.2 类　比

传说木工用的锯子是鲁班发明的．有一天鲁班到山上去，手指突然被一根丝毛草划了一下，划破了一道口子．他想，一根小草怎么会这样厉害呢？鲁班仔细一看，发现草叶子的边缘生着许多锋利的小齿．鲁班立即想到，如果照着丝毛草叶子的模样，用铁片打制一把带利齿的工具，用它在树上来回拉，不就可以很快地将树割断吗？回去后他马上打了一把这样的工具，这就是锯子．

这种仿照生物机制的类比，到了近代，便发展成了一门新兴的学科，即所谓近代仿生学．例如，潜水艇的设计思想来自鱼类在水中浮沉之生物机制的类比．

聪明的鲁班在这里所使用的推理方法称为类比（analogy）．类比

类比是一种相似，即类比的对象在某些部分或关系上的相似。在文学艺术与科学研究中都充满了类比。类比用得好，在文学作品中可使文章大为生色，在科学研究中可引出新的发现。

是根据两个不同的对象在某方面的相似之处，推测出这两个对象在其他方面也可能有相似之处，如根据带齿的草叶与带齿的铁片结构相似，由前者能划破手指，推出后者能割断树木。例如，代数中根据分式与分数都具有分子、分母这个相同的形式，从而推出分式具有分数相似的性质，分式可以像分数一样进行化简和运算，这就是类比。

例 1 长方形和长方体，如图 6－5 所示。

图 6－5

“问君能有几多愁，恰似一江春水向东流。”（李煜）用的就是类比。

长方形的每一边恰与另一边平行，而与其余的边垂直；
长方体的每一面恰与另一面平行，而与其余的面垂直。
这两种几何图形间可以建立类比关系。如表 6.2 所示：

我们在学习立体几何时常常可以类比平面几何，将在平面几何中成立的结论进行推广，得到许多类似的结论。

表 6.2

长方形	长方体
每相邻两边互相垂直	每相邻两棱互相垂直 每相邻两面互相垂直
对边互相平行	对棱互相平行
对边长度相等	对棱长度相等
对角线相等	对角线相等
对角线互相平分	对角线互相平分
对角线的平方等于长与宽的平方和	对角线的平方等于长、宽、高的平方和
面积等于长与宽的乘积 $S=ab$	体积等于长、宽、高的乘积 $V=abc$

例 2 著名的欧姆定律就是德国物理学家欧姆在 1826 年把电传导系统与热传导系统作类比而导出的。电流 I 与热量 Q 相当，电压 V 同温差 ΔT 相当，电阻 R 与比热 c 的倒数相当。

电传导系统	热传导系统
I（电流）	Q（热量）
V（电压）	ΔT（温差）
R（电阻）	$\frac{1}{c}$（比热的倒数）

在热传导系统中有关系式：

$$Q=mc\Delta T\ (m\text{ 是质量}).$$

于是，就可猜想在电传导系统中有关系式：

$$I=\frac{1}{R}V,$$

这就是欧姆定律.

例 3 医药试验不宜直接在人体上进行. 老鼠、猴子与人在身体结构上具有类似之处，于是，有理由相信，在这些动物身上的试验结果类似于在人体上试验的结果.

练　习

线段、三角形与四面体，如图 6－6 所示.

图 6－6

线段是直线（一维空间）上的最简单的封闭图形，它由两点围成；

三角形是平面（二维空间）上的最简单的封闭图形，它由三条直线围成，在平面上两条直线围不成封闭图形；

四面体是空间（三维空间）上的最简单的封闭图形，它由四张平面围成，在空间三张平面围不成封闭图形.

这三种图形之间可以作类比，这种类比是在不同维数的空间之间进行的.

如果我们把线段叫一维单形，三角形叫二维单形，四面体叫三维单形，那么单形的概念可以推广到高维空间中去了，例如我们可以考虑四维单形、五维单形，等等.

习题 2

学而时习之

1. 平面上的圆与空间中的球的类比。

平面几何中的概念	立体几何中的类似概念
圆	球
圆的切线	球的切面
圆的弦	球的截面圆
圆周长	球的表面积
圆面积	球的体积

圆的性质	球的性质
圆心与弦（非直径）中点的连线垂直于弦	球心与截面圆（不经过圆心的小截面圆）圆心的连线垂直于截面圆
与圆心距离相等的两弦相等，与圆心距离不等的两弦不等，距圆心较近的弦较长	与球心距离相等的两个截面圆相等，与球心距离不等的两个截面圆不等，距球心较近的截面圆较大
……	……

温故而知新

2. 将椭圆与双曲线相应概念、性质作类比，填写下表：

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
对称性（x 轴，y 轴，原点）	对称性
焦点（$\pm c$，0），$c=\sqrt{a^2-b^2}$	焦点
离心率 $e=\frac{c}{a}<1$	离心率
准线 $x=\pm\frac{a^2}{c}$	准线

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
长轴 $2a=\frac{2ep}{1-e^2}$	长轴
短轴 $2b=\frac{2ep}{1-e^2}$	短轴
椭圆上一点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$	双曲线上一点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程

3. 判断下列推理是否正确.

（1）把 $a(b+c)$ 与 $\log_a(x+y)$ 类比，则有：

$$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y.$$

（2）把 $a(b+c)$ 与 $\sin(x+y)$ 类比，则有：

$$\sin(x+y)=\sin x+\sin y.$$

（3）把 $(ab)^n$ 与 $(a+b)^n$ 类比，则有：

$$(a+b)^n=a^n+b^n.$$

类比与归纳一样，也是一种合情推理，其结论正确与否，必须经过严格的证明.

6.1.3 演绎推理

演绎推理（deduction inference）与归纳推理的过程相反，它是从一般到特殊的推理.

演绎推理的主要形式就是由大前提、小前提推出结论的三段论式推理.

例1 大前提：马有四条腿；

小前提：白马是马；

结 论：白马有四条腿.

这是三段论式推理常用的一种格式，可以用以下公式来表示：

$$M-P(M\text{是}P)，$$
$$\frac{S-M(S\text{是}M)}{S-P(S\text{是}P)}.$$

三段论的公式中包含三个判断：

三段论推理的根据，用集合的观点来讲，就是：若集合 M 的所有元素都具有性质 P，S 是 M 的子集，那么 S 中所有元素都具有性质 P.

第一个判断称为大前提，它提供了一个一般的事实或道理；

第二个判断称为小前提，它指出了一个特殊情况；

这两个判断联合起来揭示了一般事实或道理和特殊情况的内在联系，从而产生了第三个判断——结论。

演绎推理是一种必然性推理，演绎推理的前提与结论之间有蕴涵关系，因而，只要大前提、小前提都是真实的，推理的形式是正确的，那么结论必是真实的．但错误的前提可能导致错误的结论．

数学理论都是用演绎推理组织起来的．每一个数学理论都是一个演绎体系．最典型的例子就是欧几里得几何，它是建立在五组公理之上的演绎体系．

例 2 用三段论证明：

直角三角形两锐角之和为 90°．

证明 因为任意三角形三内角之和为 180°， （大前提）

而直角三角形是三角形， （小前提）

所以直角三角形三内角之和为 180°． （结论）

设直角三角形两锐角为 α 和 β，则上面结论可表示为

$$\alpha+\beta+90^\circ=180^\circ.$$

因为等量减等量差相等， （大前提）

而 $(\alpha+\beta+90^\circ)-90^\circ=180^\circ-90^\circ$ 是等量减等量，

（小前提）

所以 $\alpha+\beta=90^\circ$ 成立． （结论）

这里用了两次三段论进行推理，在数学中有时要用很多次的三段论来证明一个命题，数学命题的证明过程就是一连串三段论的有序组合．只是为了简洁，往往略去大前提或小前提，甚至有的大前提、小前提全省略．如

完整式：

一切直角都相等， （大前提）

这两个角是直角， （小前提）

所以，这两个角相等． （结论）

省略式：

因为这两个角是直角， （小前提）

所以这两个角相等． （结论）

或省略式：

两个直角相等. (结论)

例 3 设 B_k 是 $(a+1)^n$ 的展开式中 a^k 的系数 $(k=0, 1, \cdots, n)$，求证：$B_0+B_1+\cdots+B_n=2^n$.

证明 由假设可知

$(a+1)^n=B_0+B_1a+B_2a^2+\cdots+B_na^n$, (大前提)

取 $a=1$, (小前提)

即得

$2^n=B_0+B_1+\cdots+B_n$. (结论)

练 习

用三段论证明：矩形的两条对角线互相平分.

习题 3

学而时习之

把下列各个推理还原成三段论.

1. 因为 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 是等腰 $\triangle ABC$ 的两底角，所以 $\angle ABC=\angle ACB$.
2. A，B，C 三点可以确定一个圆，因为它们不在同一直线上.
3. 一圆周角所对的弧是半圆，则它是一直角.

温故而知新

4. 用三段论证明：如果两条直线都和第三条直线垂直，那么，这两条直线平行.

6.1.4 合情推理与演绎推理的关系

海伦（Heron，约1世纪），古希腊数学家、物理学家、天文学家，他发现了光学中的反射定律．

古希腊亚历山大城有一位久负盛名的学者——海伦，有一天，一位远道而来的将军向他请教一个问题：

从 A 地出发到河边饮完马再到 B 地去，在河边哪个地方饮马可使路途最短？如图 6－7 所示．

图 6－7

海伦巧妙地类比光的反射原理给出了下面的解法：

要解决的问题是：如何在 MN 上选出一个点 P，使 $AP+BP$ 最短．

用合情推理的方法设想答案：从点 A 到直线上一点 P，再从点 P 到点 B 恰似光线的反射，因为光走最短路线，由此猜想，最短路线应该像光的反射线．

用合情推理构思证明：如果把 MN 看成镜子，把点 B 看作一只眼睛，从镜子里看点 A 的像点 A'，点 A' 应该在镜子的背后，并且点 A' 在 BP 的延长线上．

由此先作点 A 关于 MN 的对称点 A'，连接 BA'，交 MN 于点 P，点 P 即为所求．

用演绎法证明如下：

如图 6－8 所示，在 MN 上任取一点 P'（异于点 P），则 $AP'=P'A'$，$AP=PA'$，从而

$$AP'+P'B=A'P'+P'B>A'B=A'P+PB=AP+PB.$$

由此可知：A 到 B 经点 P 距离最短．

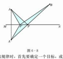


图 6－8

在探索自然规律时，首先要确定一个目标，或者提出一个要解决的问题；然后通过日常的实践、分析和合情推理，总结出一个预期的解决方案或猜想；最后还需对此猜想作出严格的证明．证明的过程中则需要按演绎推理的规则进行，证明完前一步，下一步又该如何演绎，仍需依靠合情推理提供思路，直至完成全部证明．

G. 波利亚曾指出："数学的创造过程是与其他知识的创造一样的，在证明一个定理之前，你先得猜想这个定理的内容，在你完全作出详细的证明之前，你先得猜想证明的思路．你要先把观察到的结果加以综合，然后加以类比，你得一次又一次地尝试．数学家的创造性成果是论证推理（演绎推理），即证明．但这个证明是通过合情推理，通过猜想而发现的．"

6.2 直接证明与间接证明

6.2.1 直接证明：分析法与综合法

"走迷宫"游戏要求人们从入口处走到迷宫的出口处，人们习惯于"顺推"，即从"入口"开始依次在各个岔口来回试探，碰壁后再调整路线，这样反复试探，最终可以找到"出口"．如果倒过来走，即从"出口"倒推到"入口"，有时更容易办到．

在数学证明中，就有这样的两种方法：一种是由已知走向求证，

综合法的执因推果，有如从长江源头顺流而下，一直到达上海的长江口．

分析法的执果索因，有如从上海沿长江逆流而上去寻找长江的源头．

即从数学题的已知条件出发，经过逐步的逻辑推理，最后达到待证结论或需求的问题，称为**综合法**（synthesis method）；另一种则是反过来，由求证走向已知，即从数学题的待证结论或需求问题出发，一步一步地探索下去，最后达到题设的已知条件，称为**分析法**（analysis method）．综合法和分析法是直接证明的两种基本方法．

例 1 如图 6－9，平行四边形 $ABCD$ 中，$AE\perp BD$ 于 E，$CF\perp BD$ 于 F．

求证：$AE=CF$．

图 6－9

证法 1 综合法

$$\left.\begin{array}{l}\text{平行四边形 } ABCD\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}AB=CD\\ AB\parallel DC\Rightarrow\angle1=\angle2\end{array}\right.\\ \left.\begin{array}{l}AE\perp BD\\ CF\perp BD\end{array}\right\}\Rightarrow\angle AEB=\angle CFD=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\triangle ABE\cong\triangle CDF\Rightarrow AE=CF.$$

证法 2 分析法

要证 $AE=CF$ 成立，

由于 AE，CF 分别是 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 的高，

由于全等三角形对应边上的高相等．

所以只需证 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$．

由题设，平行四边形 $ABCD$ 中，有 $AB=CD$，$AD=BC$，$BD=BD$，由 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$ 成立．

由此，命题得证．

从上例可以看出，分析法的特点是：从“未知”看“需知”，执果索因，逐步靠拢“已知”．其逐步推理，实际上是要寻找它的充分条件．综合法的特点是：从“已知”看“可知”，由因导果，逐步推

向“未知”，其逐步推理，实际上是寻找它的必要条件.

例 2 求证：$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

分析 因综合法不太容易想到解决这类问题的途径，所以用分析法探求证明途径.

证法 1 分析法

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}\\ \Leftarrow&(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2\\ \Leftarrow&9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18}\\ \Leftarrow&\sqrt{14}<\sqrt{18}\\ \Leftarrow&14<18.\end{aligned}$$

最后一个不等式成立，故原不等式成立.

基于上述分析法的证明，我们还可以给出例 2 的综合法证明.

证法 2 综合法

$$\begin{aligned}&14<18,\\ \Rightarrow&\sqrt{14}<\sqrt{18},\\ \Rightarrow&9+2\sqrt{14}<9+2\sqrt{18},\\ \Rightarrow&(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2<(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2.\end{aligned}$$

因为$\sqrt{2}+\sqrt{7}>0$，$\sqrt{3}+\sqrt{6}>0$，所以$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

在上例中，我们很难想到从“$14<18$”入手，用综合法比较困难. 因此先用分析法探索证明的途径，然后用综合法的形式写出证明过程，这是解决数学问题的一种常用方法.

有时也将综合法、分析法结合起来，就好像有两个人，一个人从入口走向迷宫的出口，一个人从迷宫出口走向入口，争取在某处相会.

练 习

分别用综合法与分析法证明：

两个不相等的正数的算术平均数大于它们的几何平均数.

习题 4

学而时习之

分别用综合法与分析法证明：

1. 如图 6 - 10，在平行四边形 $ABCD$ 中，$BM=MC$，$AN=ND$。

求证：$BE=EF=FD$.

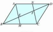


图 6 - 10

2. 如果 x 为实数，那么 $\frac{x^2}{1+x^4}\leq\frac{1}{2}$.

温故而知新

分别用综合法与分析法证明：

3. 如图 6 - 11，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AE\perp BD$ 于 E，$CF\perp BD$ 于 F。

求证：$AECF$ 是平行四边形.

图 6 - 11

4. 求证：$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$.

6.2.2 间接证明：反证法

间接证明不是从正面确定论题的真实性，而是证明它的反论题为假，或改证它的等价命题为真，以间接地达到目的. 反证法是间接证明的一种基本方法.

例1 在初中数学中我们学习过直线的性质："两条直线相交，只有一个交点." 下面我们给出证明：

若两直线不只有一个交点，如有两个交点 C，C'（如图6－12），则经过此两点便有两条直线. 这与"经过两点有且只有一条直线"的公理矛盾，故原命题成立.

图6－12

上述证明没有从原命题的已知条件出发去推出结论，而是先假设原命题的否定成立，从这个假设出发，经过推理，得出与已知事实（例1是与公理）相矛盾的结论，这个矛盾的结果说明原命题结论的否定不成立，从而间接肯定了原命题结论成立. 像这样一种间接证法，称为**反证法**（reduction to absurdity）.

成语故事"自相矛盾"中，"以子之矛攻子之盾"，正是采用了反证法.

学习反证法应把握它的一般步骤：

（1）反设：假设所要证明的结论不成立，而设结论的反面成立；

（2）归谬：由"反设"出发，通过正确的推理，导出矛盾——与已知条件，已知的公理、定义、定理、反设及明显的事实矛盾或自相矛盾；

这相当于增加了一个已知条件，无异于雪中送炭！

（3）结论：因为推理正确，产生矛盾的原因在于"反设"的谬误，既然结论的反面不成立，从而肯定了结论成立.

运用反证法的关键在于导出矛盾.

例2 求证 $\sqrt{2}$ 是无理数.

无理数$\sqrt{2}$的发现，在历史上比负数还要早，它是伴随着勾股定理的发现而被发现的，这要归功于古希腊的毕达哥拉斯学派．可用反证法证明如下：

反设　假设$\sqrt{2}$是有理数，不妨设$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$（p，q 为互质的正整数）．

归谬　由反设有$\sqrt{2}p=q\Rightarrow q^2=2p^2$，故 2 必是 q 的因数，于是可设$q=2m$（m 为正整数）$\Rightarrow 2p^2=4m^2$，所以 $p^2=2m^2$，故 2 又是 p 的因数．因此 p，q 有公因数 2，这与 p，q 为互质的正整数相矛盾．

结论　假设$\sqrt{2}$是有理数不成立，故$\sqrt{2}$是无理数．

在应用反证法证题时，必须按“反设—归谬—结论”的思路进行，这就是应用反证法的三步曲，但叙述上可以简略每一步的名称．

多知道一点

伽利略妙用反证法

1589 年，意大利 25 岁的科学家伽利略（Galilei），为了推翻古希腊哲学家亚里士多德的“不同重量的物体从高空下落的速度与其重量成正比”的错误论断，他除了拿两个重量不同的铁球登上著名的比萨斜塔当众做实验来说明外，还运用了反证法加以证明：

假设亚里士多德的论断是正确的．设有物体 A，B，且 $A_{重}>B_{重}$，则 A 应比 B 先落地．现把 A 与 B 捆在一起成为物体 $A+B$，则 $(A+B)_{重}>B_{重}$，故 $A+B$ 比 A 先落地；又因 A 比 B 落得快，A，B 在一起时，B 应减慢 A 的下落速度，所以 $A+B$ 又应比 A 后落地，这样便得到了自相矛盾的结果．这个矛盾之所以产生，是由亚里士多德的论断所致，因此这个论断是错误的．

练　习

求证：在同一平面内，一条直线与两条平行线中的一条相交，则也必与另一条相交.

习题　5

学而时习之

1. 求证：在同一平面内，同一条直线的垂线与斜线必相交.
2. 已知 a，b，c，d 为实数，$a+b=1$，$c+d=1$，且 $ac+bd>1$. 求证：a，b，c，d 中至少有一个是负数.

温故而知新

3. 已知直线 a，b，c，其中 a，b 是异面直线，$c/\!/a$，b 与 c 不相交. 求证 b，c 是异面直线.
4. 若 p，q 是奇数，则方程 $x^2+px+q=0$ 不可能有整数根.
5. 已知 x，$y>0$，且 $x+y=1$. 求证：$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\geqslant 9$.

6.3　数学归纳法

大概每个人都遇到过“多米诺现象”：推倒头一块骨牌，它会带倒第二块，再带倒第三块……直到所有骨牌全部倒下. 我们把骨牌想象为一系列无穷多个编了号的命题：P_1，P_2，P_3，…，假定我们能够证明：

（奠基）最初的一个命题正确；

长长的一列士兵走在路上，将军把一句口令告诉最前面的士兵，这个士兵开始把口令往后传. 如果每个士兵听到口令之前都往后传，这口令自然会传遍全军.

(过渡)由每一个命题的正确性都可以推出它的下一个命题的正确性.

那么我们便证明了这一列命题的正确性．事实上，我们已会“推倒头一块骨牌”，即证明最初的一个命题成立（所谓“奠基”），而“过渡”则意味着“每一块骨牌在倒下时都将带倒下一块骨牌”．这样一来，我们并不需要特别强调应推倒哪一块骨牌．事实上，只要头一块一旦倒下，那么这一列中的任何一块骨牌都或迟或早必然要倒下．

上述事例启发我们，在证明一个与正整数有关的命题时，可采用下面两个步骤：

（1）证明 $n=1$ 时命题成立；

（2）证明：如果 $n=k$ 时命题成立，那么 $n=k+1$ 时命题也成立．

我们有(1)(2)作依据，根据(1)，知 $n=1$ 时命题成立，再根据(2)知 $n=1+1=2$ 时命题成立，又由 $n=2$ 时命题成立，依据(2)知 $n=2+1=3$ 时命题成立．这样延续下去，就可以知道对任何正整数 n 命题成立．这种证明方法叫作**数学归纳法**（mathematical induction）．

例 1 用数学归纳法证明：如果 $\{a_n\}$ 是一个等差数列，那么

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立．

证明 （1）当 $n=1$ 时，左边 $=a_1$，右边 $=a_1+0\cdot d=a_1$，等式成立．

（2）假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$a_k=a_1+(k-1)d,$$

那么 $a_{k+1}=a_k+d$

$=[a_1+(k-1)d]+d$

$=a_1+[(k+1)-1]d.$

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立．

根据（1）、(2)，可以断定，等式对任何正整数都成立．

上述结论是容易理解的：根据（1），$n=1$ 时等式成立；再根据(2)，$n=1+1=2$ 时等式也成立．由于 $n=2$ 时等式成立，再根据(2)，$n=2+1=3$ 时等式也成立．这样递推下去，就知道 $n=4$，5，6，…时等式都成立，即等式对任何 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立．

从上面的例子看到，用数学归纳法证明一个与正整数有关的命题的步骤是：

（1）证明当 n 取第一个值 n_0（例如 $n_0=1$ 或 2 等）时结论正确；

（2）假设当 $n=k$（$k\in\mathbf{N}_+$，且 $k\geqslant n_0$）时结论正确，证明当 $n=k+1$ 时结论也正确.

在完成了这两个步骤以后，就可以断定命题对于从 n_0 开始的所有正整数 n 都正确.

例 2 用数学归纳法证明：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

证明 （1）当 $n=1$ 时，左边$=1$，右边$=1$，等式成立.

（2）假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1).$$

那么 $1+2+3+\cdots+k+(k+1)$

$$=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1].$$

这表明，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据（1），（2）可以断定，等式对任何正整数 n 都成立.

用数学归纳法证明命题的这两个步骤，是缺一不可的．第一个步骤，通常证明起来很简单，但绝不能省略这一步骤．去掉这一步骤就会导出荒谬的结论．例如可以证出所有的正整数全相等的结论．事实上，假定

$$k=k+1$$

成立，两边各加 1 就会得出

$$k+1=k+2.$$

由此可得出全体正整数都相等！

使用第一步骤时，并不一定每次都从 $n=1$ 开始，也可以从某一

观察

$$1=\frac{1\cdot2}{2},$$

$$1+2=\frac{2\cdot3}{2},$$

$$1+2+3=\frac{3\cdot4}{2},$$

$$1+2+3+4=\frac{4\cdot5}{2},$$

……

归纳猜想：

$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}\cdot n(n+1)$.

个别的正整数开始，但这个正整数必须是要证公式的第一项。

第二个步骤是证明的难点，要经过大量的反复实践才能熟练灵活地掌握数学归纳法的证明方法。

练 习

用数学归纳法证明：

1. 首项是 a_1，公比是 q 的等比数列的通项公式是 $a_n=a_1q^{n-1}$.
2. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.
3. $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

习题 6

学而时习之

用数学归纳法证明：

1. $2+4+6+\cdots+2n=n^2+n$.
2. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{1}{2}n(n+1)\right]^2$.

温故而知新

观察

$f(3)=180^\circ$,

$f(4)=2\times180^\circ$,

$f(5)=3\times180^\circ$,

……

归纳猜想：

$f(n)=(n-2)\cdot180^\circ$.

用数学归纳法证明：

4. $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n\times(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.
5. 等差数列的前项和公式：$S_n=na_1+\dfrac{1}{2}n(n-1)d$.
6. 等比数列的前项和公式：$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q\neq1)$.
7. 凸多边形的内角和：$f(n)=(n-2)\times180^\circ$ $(n\geq3)$.

小结与复习

一、指导思想

“推理与证明”是数学的基本思维过程，也是人们生活和学习中经常使用的思维方式．推理一般包括合情推理和演绎推理．

证明通常包括逻辑证明和实验、实践证明，数学结论的正确性必须通过逻辑证明来保证，即在前提正确的基础上，通过正确使用推理规则得出结论．

在本章中，通过对已学知识的回顾，进一步体会合情推理、演绎推理以及二者之间的联系与差异；体会数学证明的特点，了解数学证明的基本方法，包括直接证明和间接证明的方法；感受逻辑证明在数学以及日常生活中的作用，养成言之有理、论证有据的习惯；通过本章的学习，开发灵性，掌握方法，深入到数学的精髓．

二、内容提要

1．合情推理与演绎推理．

合情推理是根据已有的事实和正确的结论（包括实验和实践的结果）以及个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程，归纳、类比是合情推理常用的思维方法．在解决问题的过程中，合情推理具有猜测和发现结论、探索和提供思路的作用，有利于创新意识的培养．演绎推理是根据已有的事实和正确的结论（包括定义、公理、定理等），按照严格的逻辑法则得到新结论的推理过程，培养和提高演绎推理或逻辑证明的能力是高中数学课程的重要目标．合情推理和演绎推理之间联系紧密，相辅相成．

（1）归纳．

归纳是从个别事实中概括出一般原理的一种推理模式．

归纳有以下几个特点：

1）归纳是依据特殊现象推断一般现象，因而，由归纳所得的结论超越了前提所包容的范围；

2）归纳是依据若干已知的、没有穷尽的现象推断尚属未知的现象，因而结论具有猜测的性质；

3）归纳的前提是特殊的情况，所以归纳是立足于观察、经验或实验的基础上的.

（2）类比.

类比是在两类不同的事物之间进行对比，找出若干相同或相似点之后，推测在其他方面也可能存在相同或相似之处的一种推理模式.

类比有以下几个特点：

1）类比是从人们已经掌握了的事物的属性，推测正在研究中的事物的属性，它以旧有认识作基础，类比出新的结果；

2）类比是从一种事物的特殊属性推测另一种事物的特殊属性；

3）类比的结果是猜测性的，不一定可靠，但它却具有发现的功能.

在运用类比推理时，其一般步骤为：首先，找出两类对象之间可以确切表述的相似性（或一致性）；然后，用一类对象的性质去推测另一类对象的性质，从而得出一个猜想；最后，检验这个猜想.

（3）演绎推理.

演绎推理是由一般性的命题推出特殊性命题的一种推理模式.

演绎推理的主要形式，就是由大前提、小前提推出结论的三段论式推理. 三段论式推理常用的一种格式，可以用以下公式来表示：

$$M—P(M\text{是}P),$$

$$\frac{S—M(S\text{是}M)}{S—P(S\text{是}P)}.$$

三段论推理的根据，用集合论的观点来讲，就是：若集合 M

的所有元素都具有性质 P，S 是 M 的子集，那么 S 中所有元素都具有性质 P。

三段论的公式中包含三个判断：第一个判断称为大前提，它提供了一个一般的事实或道理；第二个判断叫小前提，它指出了一个特殊情况；这两个判断联合起来，揭示了一般事实或道理和特殊情况的内在联系，从而产生了第三个判断——结论。

2. 直接证明与间接证明。

（1）直接证明：分析法与综合法。

分析法是一种从结果追溯到产生这一结果的原因的思维方法，而综合法则是从原因推导到由原因产生的结果的思维方法。具体地说，分析法是从数学题的待证结论或需求问题出发，一步一步地探索下去，最后达到题设的已知条件。综合法是从数学题的已知条件出发，经过逐步推理，最后达到待证结论或需求问题。

（2）间接证明：反证法。

对于反证法，法国数学家阿达玛（Hadamard，J.S.）这样说过："反证法在于表明：若肯定定理的假设而否定其结论，就会导致矛盾。"这是对反证法极好的概括。

反证法证题的一般步骤：

1）反设：假设所要证明的结论不成立，而设结论的反面成立；

2）归谬：由"反设"出发，通过正确的推理，导出矛盾——与已知条件，已知的公理、定义、定理、反设及明显的事实矛盾或自相矛盾；

3）结论：因为推理正确，产生矛盾的原因在于"反设"的谬误，既然结论的反面不成立，从而肯定了结论成立。

3. 数学归纳法。

数学归纳法是一种证明与正整数 n 有关的数学命题的重要方法．用数学归纳法证明命题的步骤是：

（1）证明当 n 取第一个值 n_0（例如 $n_0=1$ 或 2 等）时结论正确；

（2）假设当 $n=k$（$k\in\mathbf{N}_+$，$k\geqslant n_0$）时结论正确，证明当

$n=k+1$ 时结论也正确.

在完成了这两个步骤以后，就可以断定命题对于从 n_0 开始的所有正整数 n 都正确.

三、学习要求和需要注意的问题

1. 学习要求.

（1）结合已学过的数学实例和生活中的实例，了解合情推理的含义，能利用归纳和类比等进行简单的推理，体会并认识合情推理在数学发现中的作用.

（2）结合已学过的数学实例和生活中的实例，体会演绎推理的重要性，掌握演绎推理的基本模式，并能运用它们进行一些简单推理.

（3）通过具体实例，了解合情推理和演绎推理之间的联系和差异.

（4）结合已经学过的数学实例，了解直接证明的两种基本方法：分析法和综合法；了解分析法和综合法的思考过程、特点.

（5）结合已经学过的数学实例，了解间接证明的一种基本方法——反证法；了解反证法的思考过程、特点.

2. 需要注意的问题.

（1）应通过实例，运用合情推理去探索、猜测一些数学结论，并用演绎推理确认所得结论的正确性，或者用反例推翻错误的猜想. 重点在于通过学习具体实例理解合情推理与演绎推理，而不追求对概念的抽象表述.

（2）要认识到观察、归纳、类比、猜想、证明是相互联系的，在数学学习中综合运用它们. 在探讨某些问题时，可以先从观察入手，发现问题的特点，形成解决问题的初步思路；然后用归纳、类比方法进行试探，提出猜想；最后用逻辑推理方法（例如数学归纳法）去进行推证，以检验所提出的猜想.

（3）本章中设置的证明内容是对已学过的基本证明方法的总结，应通过学习实例，认识各种证明方法的特点，体会证明的必要

性．对证明的技巧性不作过高的要求．

(4) 要认识到用数学归纳法证明问题时，第一步是递推的基础，第二步是递推的依据，两者缺一不可．

四、参考例题

例1 已知数列

$$\frac{1}{1\times4},\ \frac{1}{4\times7},\ \frac{1}{7\times10},\ \cdots,\ \frac{1}{(3n-2)(3n+1)},\ \cdots$$

计算 S_1，S_2，S_3，S_4．根据计算结果，对 S_n 的表达式有什么猜想？用数学归纳法证明猜想．

解 $S_1=\frac{1}{1\times4}=\frac{1}{4}$，

$$S_2=\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}=\frac{7+1}{28}=\frac{2}{7},$$

$$S_3=\frac{2}{7}+\frac{1}{7\times10}=\frac{20+1}{70}=\frac{3}{10},$$

$$S_4=\frac{3}{10}+\frac{1}{10\times13}=\frac{39+1}{130}=\frac{4}{13}.$$

我们看到，在表示上面四个结果的分数中，分子可用项数 n 表示，分母可用 $3n+1$ 表示，于是可猜想 S_n 为

$$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

下面用数学归纳法来试探证明一下这个猜想．

(1) 当 $n=1$ 时，

左边 $=\frac{1}{1\times4}=\frac{1}{4}$，右边 $=\frac{1}{3\times1+1}=\frac{1}{4}$，所以等式成立；

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1},$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\cdots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+$$

$$\frac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]}$$

$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{k+1}{3(k+1)+1}.$$

所以，当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

根据(1)和(2)，可知等式对任何 $n\in\mathbf{N}_+$ 都成立，即所得出的猜想得到证实.

例 2 费马大定理.

我国早在商周时代（约公元前 1100 年）就已经知道了不定方程：

$$x^2+y^2=z^2$$

至少有一组正整数解：$x=3$，$y=4$，$z=5$.

法国数学家费马（Fermat，1601—1665）在阅读古希腊数学家丢番图的《算术》一书的第Ⅱ卷第 8 命题“将一个平方数分为两个平方数的和”时，他想到了更一般的问题，费马在页边空白处写下了如下的一段话：

“将一个立方数分为两个立方数的和，一个四次方数分为两个四次方数的和，或者一般地将一个 n 次方数分为两个同次方数的和，这是不可能的．关于此，我确信已找到了一个真正奇妙的证明，可惜这儿的空白太小，写不下.”

这段叙述用现代数学语言来叙，就是

“当整数 $n>2$ 时，方程

$$x^n+y^n=z^n$$

没有正整数解”.

这就是著名的费马大定理．这个结论费马认为可以证明，但并没有给出证明过程．这个困惑了世间智者 357 年的猜想，终于在 1994 年获证.

复习题六

学而时习之

1. 等差数列的通项公式.

设等差数列的公差是 d，那么

$$a_1=a_1+0d,$$

$$a_2=a_1+d=a_1+1d,$$

$$a_3=a_2+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=a_1+3d,$$

……

由此，猜想等差数列的通项公式是 $a_n=$________.

2. 观察下面的几个算式，找出规律：

$$1+2+1=4$$

$$1+2+3+2+1=9$$

$$1+2+3+4+3+2+1=16$$

$$1+2+3+4+5+4+3+2+1=25$$

……

利用上面的规律，请你迅速算出：

$1+2+3+\cdots+99+100+99+\cdots+3+2+1=$________.

3. 如图 6-13 所示，由火柴杆拼成的一列图形中，第 n 个图形由 n 个正方形组成：

图 6-13

通过观察可以发现：第 4 个图形中，火柴杆有____根；第 n 个图形中，火柴杆有____根.

4. 观察下列各正方形图案，每条边上有 n（$n\geq 2$）个圆点，第 n 个图案中圆点的总数是 S_n.

$n=2\quad S_2=4\qquad n=3\quad S_3=8\qquad n=4\quad S_4=12\qquad \cdots\cdots$

图 6－14

按此规律推断出 S_n 与 n 的关系式为________.

5. 用三段论证明：

在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB=DC$. 求证：$\angle B=\angle C$.

6. 用综合法证明：

若 a，b，c 为不全相等的三个正实数，则

$$(a+b)(b+c)(c+a)>8abc.$$

7. 分别用分析法、综合法和反证法证明：$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2+\sqrt{6}$.

8. 用反证法证明：

若 $a\geq b>0$，n 为正整数，且 $n\geq 2$，则 $\sqrt[n]{a}\geq\sqrt[n]{b}$.

9. 用数学归纳法证明：

(1) $1\times4+2\times7+3\times10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$；

(2) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2(a_1a_2+\cdots+a_1a_n+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)$；

(3) $\dfrac{1^2}{1\times3}+\dfrac{2^2}{3\times5}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n-1)\times(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

温故而知新

10. 四个小动物换座位，开始是鼠、猴、兔、猫分别坐 1，2，3，4 号位上（如图 6－15），第一次前后排动物互换座位，第二次左右列动物互换座位，…这样交替进行下去，那么第 2 005 次互换座位后，小兔坐在第______号座位上.

开始		第一次		第二次		第三次	
1 鼠	2 猴	1 兔	2 猫	1 猫	2 兔	1 猴	2 鼠
3 兔	4 猫	3 鼠	4 猴	3 猴	4 鼠	3 猫	4 兔

图 6－15

11. 分别用分析法、综合法和反证法证明：

若 a，b 为正数，且 $a \neq b$，则 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

12. 圆内两条非直径的弦相交，试证它们不能互相平分.

13. 设 C_n^k 是 $(x+y)^n$ 的展开式中 x^ky^{n-k} 项的系数，用三段论证明：

(1) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$；

(2) $C_n^0(1-x)^n+C_n^1x(1-x)^{n-1}+C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+C_n^nx^n=1$.

14. 用三段论证明：

若 a 是不等于 1 的实数，则函数 $y=\dfrac{x-a}{ax-1}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

15. 已知数列

$$\frac{1}{1\times2},\ \frac{1}{2\times3},\ \frac{1}{3\times4},\ \cdots,\ \frac{1}{n(n+1)},\ \cdots$$

S_n 为其前 n 项和，计算 S_1，S_2，S_3，由此推测计算 S_n 的公式，并用数学归纳法给出证明.

16. 已知数列

$$\frac{8\times1}{1^2\times3^2},\ \frac{8\times2}{3^2\times5^2},\ \cdots,\ \frac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2},\ \cdots$$

S_n 为其前 n 项和，计算得

$$S_1=\frac{8}{9},\quad S_2=\frac{24}{25},\quad S_3=\frac{48}{49},\quad S_4=\frac{80}{81}.$$

观察上述结果，猜测计算 S_n 的公式，并用数学归纳法加以证明.

17. 在平面上有 n 条直线，任何两条都不平行，并且任何三条都不交于同一点，问这些直线把平面分成多少部分？

18. 将直角三角形与直四面体进行类比，把勾股定理推广到三维空间的形式.

上下而求索

19. 已知正三角形内任一点 P 到三条边的距离之和等于三角形的高. 我们可以猜测正四面体内任一点 Q 到四个面的距离之和等于多少呢？并给出证明.

20. (角谷猜想也称 $3x+1$ 问题)

任取一个大于 2 的自然数，反复进行下述两种运算：

(1) 若是奇数，就将该数乘以 3 再加上 1；

(2) 若是偶数，则将该数除以 2.

例如，对 3 反复进行这样的运算，有：

$$3\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1;$$

对 4，5，6 反复进行上述运算，其最终结果也都是 1，再对 7 进行这样的运算，有：

$$7\to22\to11\to34\to17\to52\to26\to13\to40\to20\to10\to5\to16\to8\to4\to2\to1.$$

运用归纳推理建立猜想（通常称为“角谷猜想”）：从任意一个大于 2 的自然数出发，反复进行（1）、（2）两种运算，最后必定得到 1．这个猜想后来被人们多次检验，发现对 7 000 亿以下的数都是正确的，究竟是否对大于 2 的一切自然数都正确，至今还不得而知．

阅读与思考

用计算机证明几何定理

用机器证明数学定理，是历史上一些杰出的数学家与哲学家梦寐以求的事.

数学问题大体上有两类：一类是求解，一类是求证. 我们熟悉的求解问题很多：解方程，解应用题，几何作图，求最大公约数与最小公倍数. 我们熟悉的求证问题，大多是初等几何证明题，还有证明恒等式，证明不等式.

中国古代数学研究的中心问题是求解. 把问题分为若干类，分别给出解题的方法. 这方法是一系列确定的步骤，谁都可以学会. 会一个方法，便能解一类问题.《九章算术》就是这么做的.

用一个固定的程序解决一类问题，这就是数学机械化的基本思想. 追求数学的机械化方法，是中国古代数学的优秀传统之一.

在西方，以希腊几何学研究为代表的古代数学，所研究的中心问题不是求解而是求证，是从公理出发用演绎推理方式证明一个一个的定理. 而证明定理的方法，则是一题一证，各具巧思，无一确定的法则可循. 证明的成功有赖于技巧与灵感.

能不能找到一种方法，像解方程那样，按固定法则证明一批一批的几何定理呢?

17 世纪法国的唯理论哲学家、发明了解析几何的数学家笛卡儿，曾有过一个大胆的设想：

“一切问题化为数学问题. 一切数学问题化为代数问题. 一切代数问题化为代数方程求解问题.”

笛卡儿想得太简单了：如果实现了他的计划，一切科学问题都可以机械地解决了，因为代数方程求解是有机械法则的.

但是笛卡儿总算用坐标方法——解析几何的方法，把初等几何问题化成了代数问题.

比笛卡儿稍晚一些的德国唯理论哲学家、与牛顿同时创立微积分的数学家莱布尼茨，曾有过“推理机器”的设想，希望用一台机器代替人的推理活动. 当人们争论得面红耳赤相持不下的时候，不妨心平气和地坐下来，让机器演算一遍以确定是非曲直. 莱布尼茨还真的设计过计算机，他的努力促进了数理逻辑的研究.

20世纪的数学大师希尔伯特，在他的名著《几何基础》一书中，也曾提出过一小类几何命题的机械判定方法.

第二次世界大战以后，电子计算机的出现大大促进了定理机器证明的研究. 经过许多出色数学家的辛勤耕耘，这个领域有了蓬勃发展. 各国数学家先后提出过几种用机器证明初等几何定理的方法——这是数学家们长期以来就想实行机械化的领域，但是都不能在计算机上真的用来证明非平凡的几何定理. 一直到杰出的中国数学家吴文俊教授在1977年发表他的初等几何机器证明新方法之后，在电子计算机上证明初等几何定理才成为现实. 一个古老的梦想开始实现了. 用吴方法已在计算机上证明了600多条不平凡的几何定理，其中包括一些新发现的定理.

吴方法的基本思想是：先把几何问题化为代数问题，再把代数问题化为代数恒等式的检验问题. 代数恒等式的检验是机械的，问题的转化过程也是机械的，整个问题也就机械化了.

下面是吴方法（代数法）的一个简单例子.

求证：平行四边形的两条对角线互相平分.

分析：第一步　几何问题代数化.

画图（如图6-16），并建立直角坐标系. 设 $A(0,0)$, $B(p,0)$, $C(u,v)$, $D(x,y)$, $Q(z,w)$, 用代数等式表示出题设条件有以下四式：

图6-16

(1) $DC/\!/AB$，$y-v=0$；

(2) $AD/\!/BC$，$vx-(u-p)y=0$；

(3) 点 Q 在 AC 上，$vz-uw=0$；

(4) 点 Q 在 BD 上，$(x-p)w-(z-p)y=0$.

表示出命题结论有以下两式：

(5) $AQ=QC$，$2z-u=0$ 或 $2w-v=0$；

(6) $BQ=QD$，$x+p-2z=0$ 或 $2w-y=0$.

第二步　整序.

原来表示假设条件的方程组化为较简单的升列.

(1) $y-v=0$；

(2) $vx-(u-p)y=0$；

(3) $2pw-pv=0$；

(4) $vz-uw=0$.

第三步　伪除法求余.

若要证明 $AQ=QC$，即 $2z-u=0$ 成立，把第二步中变元"降次"后代入验证即得证.

吴方法的成功吸引人们向更高的目标攀登，怎样用计算机产生人能看得懂，并能检验的证明？

我国科学家提出了用面积消点的方法，对这类问题作了更简明、更易于理解的机械化处理，即可读式证明.

下面只简述简单的大意：

几何图形一般是由点、线、角、圆等基本元素构成，而两点决定一线，两线决定一角，三点决定一圆，…所以这些基本的元素最后都可以还原为点的表达.

一个几何命题的已知条件，是通过一步一步画图的次序描写出来的，第一步给出的是若干个自由的点（包括：线、角、圆等）接着在这些自由点的基础上，给出与自由点有依存关系的新点，每出现一个新点，都算一个新的步骤，已知条件就是一个个新点的诞生过程的步骤.

同样一个几何命题的结论条件，也由一系列点的关系所表述，这些关系式经过整理以后，可以把所有关系点的信息放在表达式的左端，而右端只剩一个常数项.

消点证明的思路就是把结论条件中出现的许多点，先选一个在已知条件中最后出现的点消去，在消去的同时显示所根据的理由．这样，结论条件中就不再出现这个点，已知条件中也可以把最后一个步骤删去，继续如此做下去，最后结论条件的左端也只剩下纯粹的常量值，不证自明了．

难点在于，怎么消去一个点，并提供一个消点的充足理由．这需要建立一个定理的信息库，并且还需要建立一个有力度的搜索法，以便搜索到当前待消除点的相关的已知定理，用此定理既可以消去点，又同时提供了推理的理由．这跟我们平时做题具有相同的演绎过程．

但是定理的信息库规模太大了，就好像你平时把定理都已经背下来，无须证明就能判断命题是否成立，失去了推理的意义；如果定理的信息库规模太小了，一切都要从公理开始推导，既繁琐又重复，也不符合逻辑的推导意义．

为什么叫面积消点法？就是要找出一条深贯平面几何内涵的线索，使得这条线索离源头的公理较近，离众多其他命题又不太远，这样就可以最大限度地压缩定理的信息库，而包容了消点的威力．面积定理就是这样一条能够贯穿整个知识内容的主线索，找到了这条线索，也就由此诞生了可读性的机器证明．

数学文化

公理化思想对人类文化的影响

公理化思想产生阶段是由亚里士多德的完全三段论到欧几里得《几何原本》的问世.

公元前 3 世纪，哲学家和逻辑学家亚里士多德从理论上全面阐述了公理与演绎思想，总结了前人所发现和创立的逻辑知识，以完全三段论为出发点，用演绎的方法推导出其余 19 个不同格式的所有三段论，从而创立了人类历史上第一个公理化方法.

1. 欧几里得的《几何原本》.

数学家欧几里得将逻辑公理演绎方法应用于几何学，于公元前 300 年完成了数学史上的划时代著作《几何原本》.《几何原本》是有史以来用公理化思想方法建立起来的第一门演绎数学，而且成为以后 2 000 多年严格证明的典范. 书中开篇便给出 5 条公理：

（1）等于同一个量的量彼此相等；

（2）等量加等量其和相等；

（3）等量减等量其差相等；

（4）互相重合的量彼此相等；

（5）全体大于部分.

同时给出关于几何的 5 条公设：

（1）从每个点到每个别的点可以引直线；

（2）有限的直线可以沿直线连续地延长；

（3）以任一点为中心可以用任意半径画圆；

（4）所有直角都相等；

（5）如果一条直线与另外两条直线相交，在一侧构成两个同侧内角之和小于两直角，那么这两条直线无限延长时，就在同侧内角

和小于两直角的那一侧相交.

在《几何原本》中欧几里得还给出了 119 个定义，书中共有 465 个命题皆由定义、公理与公设出发，用正确的逻辑推理逐一证明出来（前面已证得的结论后面可以当已知来用）. 他的这种数学系统开创了公理系统的先河，这种公理化的数学有不少优点，论证有根有源，使思维经济有效，便于本学科知识的系统化和逻辑上的严格化，便于该学科的传播等等.

公理化方法就是选择尽可能少的原始概念和一组公理作为出发点，采用逻辑推理的法则，将一门科学建立成演绎系统的一种方法. 现代公理系统不仅要求有上述原始概念和原始命题，而且要求这些原始命题具有独立性、相容性、完备性.

2. 牛顿力学体系的公理化展开方式.

牛顿力学体系是一个公理化的演绎系统，这在牛顿的《自然哲学的数学原理》（以下简称《原理》）一书中有清晰的表述.《原理》是一部划时代的科学巨著，是按照公理化方法写成的一本力学著作.

《原理》在一开始的“说明”与“附说”中，阐明了关于“物质”、“运动”、“外力”、“向心力”、“绝对空间”、“绝对时间”的概念与定义，直接提出了力学三定律（牛顿三定律）作为公理，在三定律之后，推出了 6 条运动基本定理，在 6 条运动基本定理之后，分卷讨论“物体运动”及“宇宙系统”.《原理》的公理化展开模式简述如下：

基本概念：

在第一卷之前先给出了 8 个定义，它们是：物质的量，运动的量，物体固有的力，外力，向心力，向心力的绝对度量，向心力的加速度，向心力的运动度量.

公理（3 条）：

（1）牛顿第一定律：每个物体都保持其静止或匀速直线运动的状态，除非有外力作用于它迫使其改变那个状态.

（2）牛顿第二定律：运动的变化正比于外力，变化的方向沿外

力作用的直线方向.

(3) 牛顿第三定律：每一种作用都有一个相等的反作用，或者两个物体间的相互作用总是相等的而且方向相反.

运动基本定理（6 条）：

(1) 力的平行四边形法则：二力共同作用于一物体时，此物体沿二力组成的平行四边形的对角线运动；运动所需的时间与它分别受到这两个力作用时沿平行四边形两边运动的时间相同.

(2) 力的三角形法则：如图 6—17，沿 AD 的力可由沿 AB 的力与沿 BD 的力合成；同样，沿 AD 的力也可分解为两个任意的沿 AB 的力与沿 BD 的力.

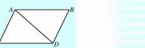


图 6－17

(3) 运动（动量）守恒，即在物体互相碰撞时，各方向运动（动量）的总和不变.

(4) 两物体或多物体体系的公共重心，在无外力作用时，保持静止或匀速直线运动，而不以体系内的物体的作用而改变其状态.

(5) 当某空间静止或匀速直线运动时，该空间内所有物体的运动不受影响.

(6) 不管物体之间以任何方式运动，如果有相等的加速力以平行的方向对之发生作用，则物体之间仍继续以相同的方式运动着，就像没有受到这个力的作用一样.

这 6 条运动的基本定理是建立在公理基础之上的，即是通过力学三定律严格证明的.《原理》在推演出运动的 6 条基本定理之后，就进一步讨论“物体之运动”以及“宇宙系统”.在讨论中，牛顿仍然采用相同的研究方法，即所有的定理都是从三定律以及被三定律证明了的 6 条运动基本定理推演出来的.

综上所述，牛顿是通过综合的方法总结出一组公理，再由公理推演得到一系列定理.这些定理散见于各卷中，其中，第一卷总共 6 章，定理 30 个；第二卷总共 9 章，定理 38 个；第三卷总共 4 章，定理 20 个.

3.《独立宣言》的公理化展开方式.

《独立宣言》是英属北美殖民地人民宣布独立的纲领性文件.

《独立宣言》是为了证明反抗大英帝国的完全合理性而撰写的，它试图借助公理化说明宣言的观点的正确性，使民众深信不疑，《独立宣言》首先提出了下面不言而喻的事实.

人人生而平等，上帝赋予他们诸如生存、自由和追求幸福等不可让与的权利.

在这个基础上，可以得到下面的结论：

(1) 为了保障这些权利，人民才组织成立政府，政府由人民同意后，取得正当的权利；

(2) 任何政府一旦损害这些权利，人们就有权改换它或废除它，建立新政府；

(3) 新政府所根据的原则及其组织权力的方式，务必使人民认为，唯有这样才最有可能保障他们的安全与幸福.

然后，列举若干具体的不平等事例，例如，司法部门包庇武装部门，使犯有死罪的军人逍遥法外；切断北美与世界各地的贸易，未得到北美人民的同意就强制征税；任意逮捕和审判北美人民等等. 这些在立法、司法、行政、军事、贸易等方面对北美殖民地人民的迫害，是严重侵犯北美人民人权的罪行，从而违背了四项真理，因而人民就有权更换和废除它，成立一个自由的和独立的国家.

最后，郑重宣布独立，并宣誓支持该项宣言（《独立宣言》全文可上网搜索）.

附 录

数学词汇中英文对照表

（按词汇所在页码的先后排序）

中文名	英 文 名	页 码
导数	derivative	12
导函数	derived function	12
极大值	maximun value	37
极小值	minimun value	37
极值	extreme value	37
定积分	definite integral	64
复数	complex number	84
实部	real part	84
虚部	imaginary part	84
虚部系数	coefficient of imaginary part	84
虚数	imaginary number	85
纯虚数	pure imaginary number	85
代数基本定理	Fundamental Theorem in Algebra	90
复平面	complex plane	93
模	module	94
共轭复数	conjugate complex number	94
合情推理	plausible reasoning	110
归纳	induction	110
欧拉	Euler	111
类比	analogy	115
演绎推理	deduction inference	119
综合法	synthesis method	124